Cours de

Traitement du signal

- Synthèse de filtres -

1ère partie : Filtres Analogiques

Benoît Decoux
benoit.decoux@wanadoo.fr

Plan

Introduction générale (1/4)

Définitions

e(t) : entrée s(t) : sortie h(t) : réponse impulsionnelle (à δ(t))

E(p) =TL[e(t)] S(p)=TL[s(t)]

Représentations

Equation différentielle

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} = \sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} \quad , \quad M \leq N$$

Réponse impulsionnelle

$h(t)$

Réponse à une entrée quelconque

$$s(t) = (e * h)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau) e(\tau) d\tau$$

TL

TL

TF

TF

Fonction de transfert de Laplace

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

Signaux quelconques

p=jω

Fonction de transfert harmonique

$$H(j\omega) = \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)} \quad \text{ou} \quad H(f) = \frac{S(f)}{E(f)}$$

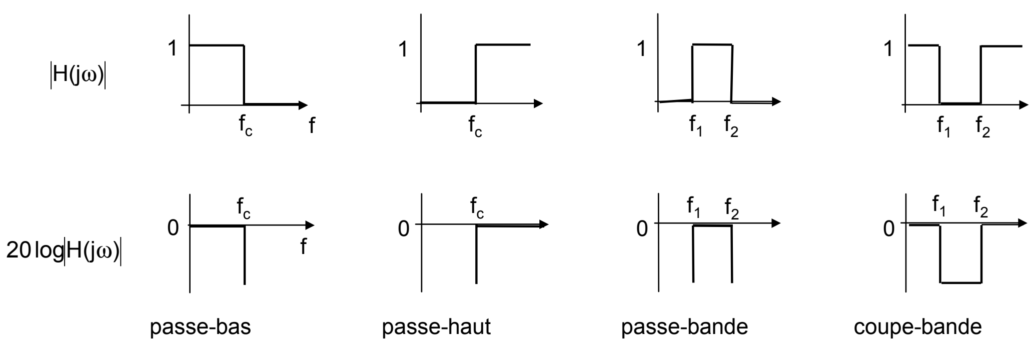
Signaux sinusoïdaux

Domaine temporel Domaine fréquentiel (complexe)

Introduction générale (2/4)

Objectif

Se rapprocher des filtres idéaux (le plus simplement possible)



Autre type de filtre courant : passe-tout (déphaseur pur)

Introduction générale (3/4)

Caractérisation des filtres "physiques"

- type : passe-bas, passe-haut, passe-bande : coupe-bande, passe-tout
- fréquence(s) de coupure
- pente des variations (liée à l'ordre du filtre)
- retard de phase

$$t_\varphi = -\frac{\varphi(\omega)}{\omega}$$

- retard de groupe

$$t_g = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$$

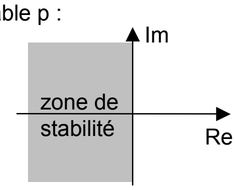
Si la phase est linéaire, t_g est constant ↔ le signal ne subit pas de déformation.

Introduction générale (4/4)

Stabilité

Condition par rapport aux pôles

Un système est stable si tous les pôles de sa fonction de transfert de Laplace sont situés dans le demi-plan situé à gauche de l'axe imaginaire du plan de la variable p :



plan p

Explication

risque d'instabilité

Pôle réel p_0 :

$$H(p) = \frac{A}{p - p_0} \overset{L}{\longleftrightarrow} h(t) = Ae^{p_0 t}$$

Pôles complexes conjugués $p_{1,2}=\alpha \pm j\beta$:

$$H(p) = \frac{A}{(p - p_1)(p - p_2)} \overset{L}{\longleftrightarrow} h(t) = A\omega e^{\alpha t}.\sin(\omega t)$$

Condition par rapport à la réponse impulsionnelle

Soit h(t) la réponse impulsionnelle d'un système. Ce système est stable si : $\int_{t=-\infty}^{+\infty} h(t)dt < \infty$

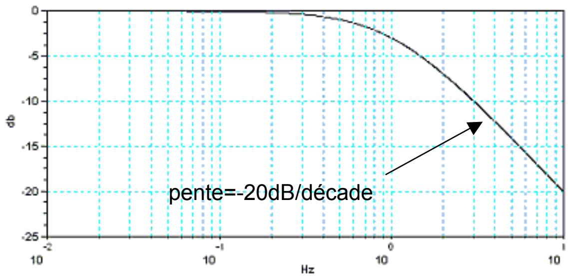
Cellules élémentaires de filtrage : 1er ordre

Cellule passe-bas du 1er ordre

Gain en dB : $H_{dB}(\omega) = 20 \log\left|H(j\omega)\right|$

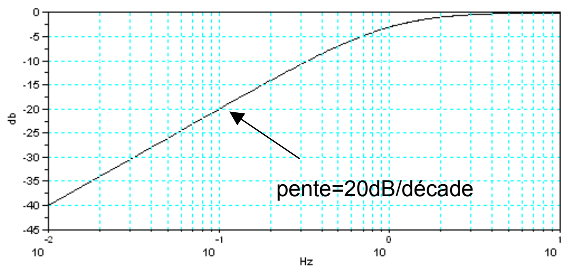
Fonction de transfert harmonique :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}}$$



Cellule passe-haut du 1er ordre

$$H(j\omega) = \frac{j\dfrac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}}$$



Cellules élémentaires de filtrage : 2e ordre (1/3)

Cellule passe-bas du 2e ordre

Exemple d'un filtre passe-bas du 2e ordre :

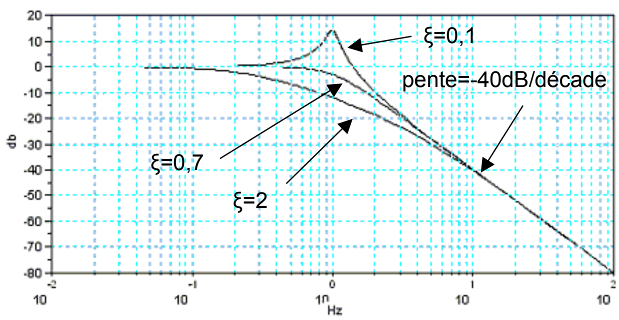
$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi j\dfrac{\omega}{\omega_c} + \left(j\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^2}$$

ξ coefficient d'amortissement

($\xi = \dfrac{1}{2Q}$, Q facteur de qualité)

Gain en dB :

$H_{dB}(\omega) = 20 \log\left|H(j\omega)\right|$ $\longleftrightarrow$



Le cas ξ=0,7 est intéressant, puisque on a une réduction de gain assez limitée (-3dB), et une pente –40dB/déc.

Cellules élémentaires de filtrage : 2e ordre (2/3)

Cellule passe-bande du 2e ordre

Exemple d'un filtre passe-bas du 2e ordre :

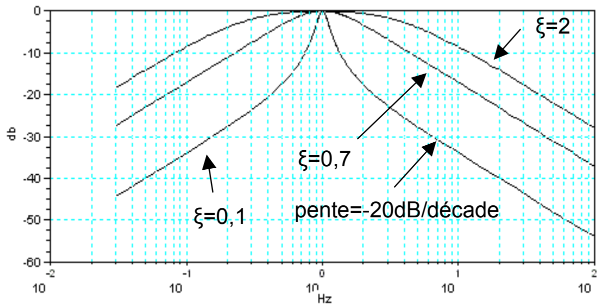
$$H(j\omega) = \frac{\left(j\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^2}{1 + 2\xi j\dfrac{\omega}{\omega_c} + \left(j\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^2}$$

bande passante : $\Delta f = \dfrac{f_0}{Q}$

avec $f_0 = \sqrt{f_{c_1} \times f_{c_2}}$ fréquence centrale

Gain en dB :

$$H_{dB}(\omega) = 20\log\left|H(j\omega)\right| \longleftrightarrow$$



Cellules élémentaires de filtrage : 2e ordre (3/3)

Cellules du 1er et du 2e ordre

1er ordre

Passe-bas : $\dfrac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}}$

Passe-haut : $\dfrac{j\dfrac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}}$

2er ordre

Passe-bas : $\dfrac{1}{1 + 2\xi j\dfrac{\omega}{\omega_c} + \left(j\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^2}$

Passe-haut : $\dfrac{2\xi j\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2\xi j\dfrac{\omega}{\omega_0} + \left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$

Passe-bande : $\dfrac{\left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2\xi j\dfrac{\omega}{\omega_0} + \left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$

Coupe-bande : $\dfrac{1 + \left(j\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^2}{1 + 2\xi j\dfrac{\omega}{\omega_c} + \left(j\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^2}$

Déphaseur : $\dfrac{1 - 2\xi j\dfrac{\omega}{\omega_c} + \left(j\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^2}{1 + 2\xi j\dfrac{\omega}{\omega_c} + \left(j\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^2}$

Différentes formes des fonctions de transfert

Différentes formes des fonctions de transfert

$$H(j\omega) \xleftrightarrow{j\omega = p} H(p) \xleftrightarrow{p/\omega_c = s} H(s)$$

harmonique (régime sinusoïdal) — en variable de Laplace — en variable de Laplace réduite (forme normalisée ↔ indépendante de ω_c)

Exemple : cellule passe-bas du 2e ordre

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi j\frac{\omega}{\omega_c} + \left(j\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}$$

utile pour étude en fréquence : gain en dB et phase (cellules élémentaires)

$$H(p) = \frac{1}{1 + 2\xi\frac{p}{\omega_c} + \left(\frac{p}{\omega_c}\right)^2}$$

utile pour étude temporelle avec signaux (causals) quelconques, étude des pôles (étude stabilité, factorisation)

$$H(s) = \frac{1}{1 + 2\xi s + s^2}$$

idem variable de Laplace, avec écriture simplifiée (=variable de Laplace réduite)

Différentes formes des fonctions de transfert

Intérêt de la forme normalisée

Toute l'étude peut porter sur la forme normalisée ; indépendamment de ω_c.

$$H(s) = \frac{1}{1+s} \xrightarrow{s = j\frac{\omega}{\omega_c}} H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

$$H(s) = \frac{1}{1 + 2\xi s + s^2} \longrightarrow H(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi j\frac{\omega}{\omega_c} + \left(j\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}$$

Au final, il faut "dénormaliser" la fonction de transfert, c'est à dire remplacer s par $j\omega/\omega_c$, pour pouvoir réaliser le filtre satisfaisant aux paramètre du filtrage..

Transformation du type de filtrage

Passage du cas passe-bas aux autres cas

Le passage d'un type à l'autre s'effectue facilement par changement de variable.

Passe-bas → passe-haut

$$s \rightarrow \frac{1}{s}$$

Passe-bas → passe-bande

$$s \rightarrow \frac{1}{B}\left(s + \frac{1}{s}\right)$$

Passe-bas → coupe-bande

$$s \rightarrow B\left(s + \frac{1}{s}\right)^{-1}$$

avec $B = \dfrac{f_{c_2} - f_{c_1}}{f_0}$

B : bande passante

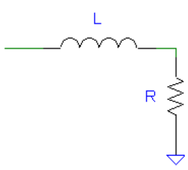
f_{c1}, f_{c2} : fréquences de coupure

f_0 : fréquence centrale du filtre

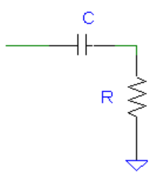
Réalisation des cellules élémentaires par circuits passifs

Réalisation par circuits passifs

1er ordre

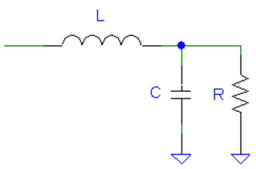


passe-bas

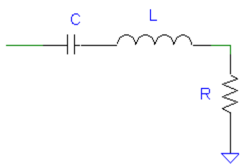


passe-haut

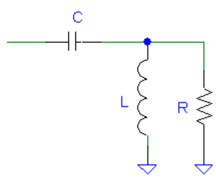
2e ordre



passe-bas



passe-bande

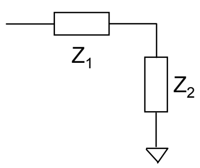


passe-haut

Méthode de calcul

Chacun de ces montages peut être vu comme un pont diviseur de tension avec 2 impédances complexes Z_1 et Z_2.

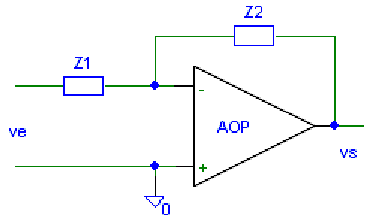
Dans le cas du 2e ordre, l'une des 2 impédances est elle-même constituée de 2 impédances complexes en série ou parallèle.

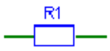


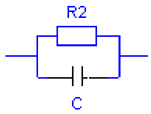
Cellule élémentaire active du 1er ordre

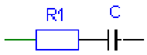
Réalisation par circuits actifs : cellule du 1er ordre

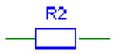
La cellule du 1er ordre suivante permet de réaliser des filtres passe-bas et passe-haut :



Passe-bas : Z_1 : 

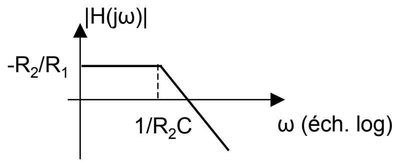
Z_2 : 

Passe-haut : Z_1 : 

Z_2 : 

Exemple : passe-bas avec R=1kΩ et C=10nF

$$H(j\omega) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + jR_2C\omega}$$



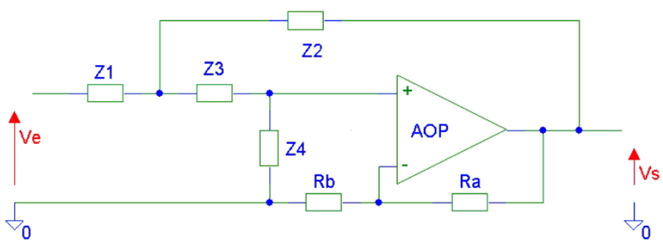
Cellule élémentaire active de Sallen-Key

Réalisation par circuits actifs : cellules du 2e ordre

Les structures de Sallen-Key et de Rauch permettent de réaliser des filtres passe-bas, passe-haut et passe-bande du 2e ordre.

Ils permettent d'obtenir des facteurs de qualité moyens (jusqu'à 20 environ).

Structure de Sallen-Key



$$H = \frac{V_s}{V_e} = \frac{kZ_2Z_4}{Z_1Z_4(1-H_0) + Z_1(Z_2+Z_3) + Z_2(Z_3+Z_4)}$$

$$H_0 = \frac{R_a}{R_b} + 1$$ gain statique (pour f=0)

Passe-bas :

$$Z_1 = R_1 \quad Z_2 = \frac{1}{C_2p} \quad Z_3 = R_3 \quad Z_4 = \frac{1}{C_4p}$$

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{R_1R_3C_2C_4}} \qquad \xi = \frac{1}{2}\left(\frac{R_1C_2(1-H_0) + R_1C_4 + R_3C_4}{\sqrt{R_1R_3C_2C_4}}\right)$$

Passe-haut :

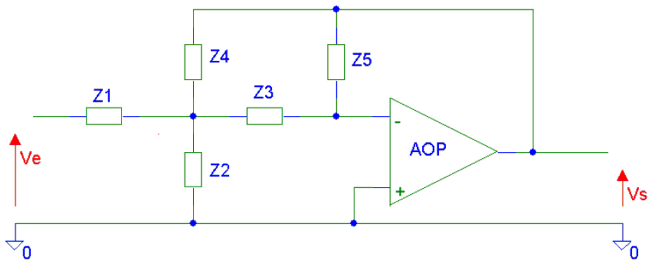
$$Z_1 = \frac{1}{C_1p} \quad Z_2 = R_2 \quad Z_3 = \frac{1}{C_3p} \quad Z_4 = R_4$$

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{R_2R_4C_1C_3}} \qquad \xi = \frac{1}{2}\left(\frac{R_2C_1 + R_2C_3 + R_4C_3(1+H_0)}{\sqrt{R_2R_4C_1C_3}}\right)$$

Cellule élémentaire active de Rauch

Réalisation par circuits actifs : cellules du 2e ordre

Structure de Rauch



$$H = \frac{V_s}{V_e} = \frac{-Y_1Y_3}{Y_5(Y_1+Y_2+Y_3+Y_4)+Y_3Y_4}$$

Passe-bas :

$$Z_1 = R_1 \quad Z_2 = \frac{1}{C_1p} \quad Z_3 = R_2 \quad Z_4 = R_3 \quad Z_5 = \frac{1}{C_2p} \quad \omega_c = \sqrt{\frac{1}{R_2R_3C_1C_2}} \quad \xi = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)\sqrt{R_2R_3\frac{C_2}{C_1}} \quad H_0 = -\frac{R_3}{R_1}$$

Passe-haut :

$$Z_1 = \frac{1}{C_1p} \quad Z_2 = R_1 \quad Z_3 = \frac{1}{C_2p} \quad Z_4 = \frac{1}{C_3p} \quad Z_5 = R_2 \quad \omega_c = \sqrt{\frac{1}{R_1R_2C_2C_3}} \quad \xi = \frac{1}{2}(C_1+C_2+C_3)\sqrt{\frac{R_1}{R_2C_2C_3}} \quad H_0 = \frac{C_1}{C_3}$$

Passe-bande :

$$Z_1 = Z_2 = R_1 \quad Z_3 = Z_4 = \frac{1}{Cp} \quad Z_5 = R_2 \quad \omega_c = \frac{2\xi}{R_1C} \quad \xi = \sqrt{\frac{R_1}{2R_2}} \quad H_0 = \frac{-1}{2\xi}$$

Cellule élémentaire active universelle

Réalisation par circuits actifs : cellules du 2e ordre

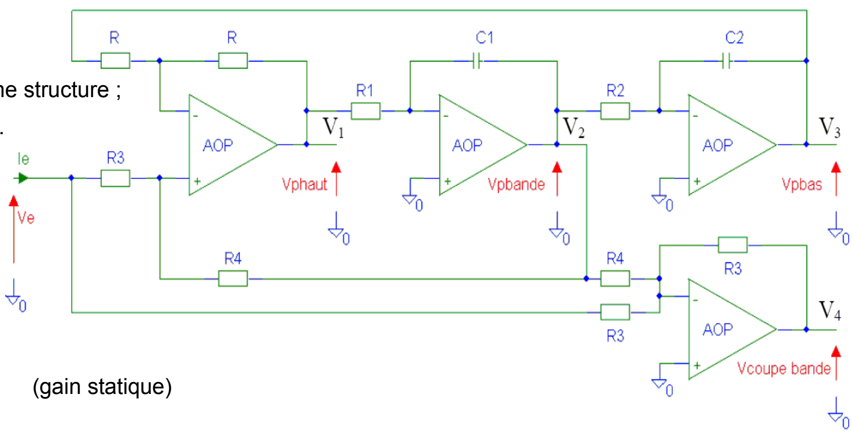
Cellule généralisée du seconde degré (ou filtre universel, ou filtre à variables d'état)

Intérêts :

- 4 filtrages de base dans une même structure ;
- facteurs de qualité élévés (Q>10).

Inconvénient :

- phases des sorties différentes



Passe-bas : $H_0 = \frac{2R_4}{R_3+R}$ (gain statique)

Passe-haut : $H_0 = \frac{-2R_4}{R_3+R_4}$

Passe-bande : $H_0 = \frac{-R_4}{R_3}$

Coupe-bande : $H_0 = -\frac{R_b}{R_a}\times\frac{2R_4}{R_3+R_4}$

$$\omega_c = \sqrt{\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}$$

$$\xi = \frac{R_3}{R_3+R_4}\sqrt{\frac{R_2C_2}{R_1C_1}}$$

Circuits passifs vs circuits actifs

Circuits passifs vs circuits actifs

Filtres passifs

Inconvénients :

- nécessitent parfois des composants volumineux (condensateurs et bobines)

Avantages :

- passifs, donc ne nécessitent pas d'alimentation (exemple : enceintes acoustiques)

Filtres actifs

Inconvénients :

- nécessitent une alimentation
- bande passante limitée donc limitation aux fréquences basses
- sensibles à leurs composants passifs (condensateurs et résistances)
- produisent du bruit
- limités en tension

Avantages :

- permettent une intégration à grande échelle (et notamment dans les processeurs)
- fiables
- coût de fabrication réduit

Etude des pôles des cellules élémentaires

Mise en évidence des pôles

Par factorisation du dénominateur, la fonction de transfert peut se mettre sous la forme :

$$H(p) = \prod_{n=0}^{N-1} \frac{-p_n}{p - p_n} \quad \text{ou} \quad H(s) = \prod_{n=0}^{N-1} \frac{1}{s - s_n} \quad \text{N ordre du filtre}$$

Exemple avec N=1

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \xrightarrow{s = j\omega/\omega_c} H(s) = \frac{1}{1+s} \rightarrow \text{1 pôle (réel pur) : } s_1 = -1$$

d'où : $H(s) = \dfrac{1}{s-(-1)}$

Exemple avec N=2 et ξ=0,7

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + \sqrt{2}j\frac{\omega}{\omega_c} + \left(j\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} \xrightarrow{s = j\omega/\omega_c} H(s) = \frac{1}{1 + \sqrt{2}s + s^2}$$

→ 2 pôles (complexes conjugués et à partie réelle <0) : $\begin{cases} s_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-j) \\ s_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+j) \end{cases}$ d'où $H(s) = \dfrac{1}{(s - \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-j))(s - \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+j))}$

Intérêt des cellules élémentaires de filtrage (1/2)

Décomposition des fonctions de transfert

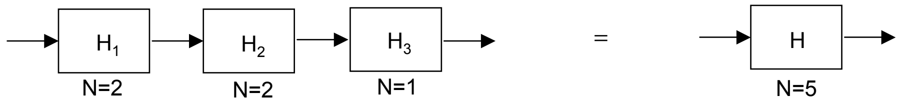
Décomposition sous forme de produit

Une fonction de transfert d'ordre n quelconque peut se décomposer en un produit de fonctions de transfert élémentaires d'ordres 1 et 2 (les ordres s'ajoutent).

$$H(j\omega) = H_1(j\omega).H_2(j\omega).H_3(j\omega)$$

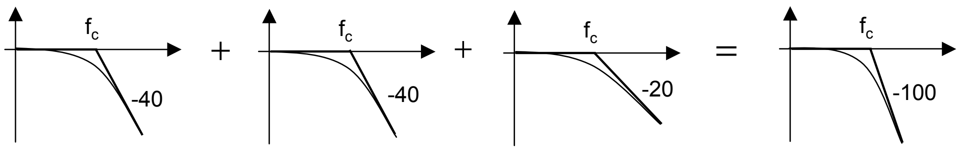
Schémas-blocs et modules électroniques

Quand les modules élémentaires (schémas-blocs ou modules électroniques) sont mis en cascade (=en série), les ordres s'ajoutent. Exemple pour l'ordre N=5 :



Diagrammes de Bode

Dans les diagrammes de Bode, les courbes de gain (en dB) s'additionnent :



→ importance de l'étude des cellules de filtrage d'ordre 1 et 2 ; on les appelle cellules élémentaires

Intérêt des cellules élémentaires de filtrage (2/2)

Position du problème

On a vu comment vu la cellule de filtrage passe-bas du 1er ordre, dont les caractéristiques sont :

- -3dB à f_c
- -atténuation -20dB/décade

puis la cellule de filtrage du 2^{e} ordre dont les caractéristiques sont

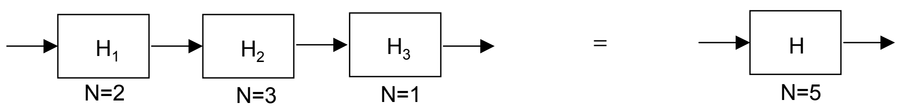
- -3dB à f_c
- -atténuation -40dB/décade

De plus, on sait qu'en associant des cellules du 1er et du 2^{e} ordre, on peut obtenir des cellules d'ordre plus élevé.

Problème : est-il possible d'obtenir un filtre d'ordre N quelconque, caractérisé par :

- -3dB à f_c
- -atténuation -20xN dB/décade ?

On a vu qu'en associant des cellules élémentaires on pouvait obtenir un ordre quelconque, comme par exemple pour l'ordre 5 :



… mais comment avoir toujours –3dB à f_c ?

Filtre de Butterworth : définition et propriétés

Intérêt

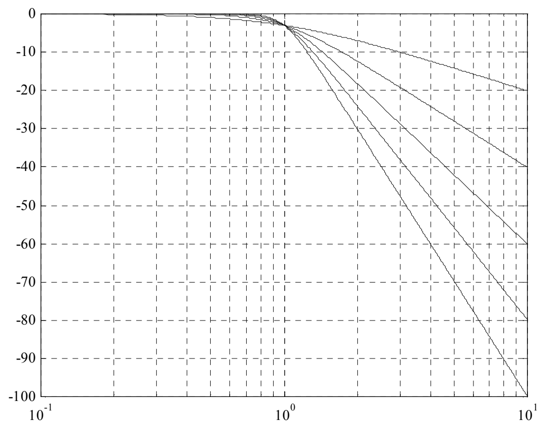
Comment obtenir une pente quelconque tout en ayant –3dB à f_c, sans calculs (trop) compliqués ?

→ Monsieur Butterworth, dans les années 30, a trouvé une solution :

Définition

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}$$

N ordre du filtre



Gain en dB pour N=1, 2, 3, 4, 5

Propriétés

- pente de la décroissance du gain : -20xN dB/décade
- gain à f_c : –3dB (¥ N)

Programme Matlab :

```
w=linspace(0.1,10,1000);
[z,p,k]=buttap(2);
h=freqs(k*poly(z),poly(p),w);
semilogx(w,20*log10(abs(h)),'black');
...
```


Filtre de Butterworth : étude de l'ordre 1 et 2

Lien avec cellules élémentaires

Cellule passe-bas du 1er ordre :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}} \quad \longleftrightarrow \quad |H(j\omega)| = \frac{1}{\left|1+j\frac{\omega}{\omega_c}\right|} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$$

Il s'agit bien d'un cas particulier du filtre de Butterworth, avec N=1.

Cellule passe-bas du 2e ordre, avec $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *(rappel : -3dB à f_c) :*

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+\sqrt{2}j\frac{\omega}{\omega_c}+\left(j\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} \quad \longleftrightarrow \quad |H(j\omega)| = \frac{1}{\left|1+\sqrt{2}j\frac{\omega}{\omega_c}+\left(j\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right|} = \frac{1}{\left|1-\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2+j\sqrt{2}\frac{\omega}{\omega_c}\right|} = \ldots = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^4}}$$

Il s'agit également d'un cas particulier du filtre de Butterworth, avec N=2.

Filtre de Butterworth : étude des pôles (1)

Etude des pôles de la fonction de transfert (=racines du dénominateur)

Différentes formes de la fonction de transfert

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}} \quad \overset{p=j\omega}{\longleftrightarrow} \quad |H(p)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{p}{\omega_c}\right)^{2N}} \quad \overset{s=p/\omega_c}{\longleftrightarrow} \quad |H(s)|^2 = \frac{1}{1+s^{2N}}$$

harmonique — en variable de Laplace — en variable de Laplace réduite

Détermination des pôles

$$s = j\frac{\omega}{\omega_c} \leftrightarrow \frac{\omega}{\omega_c} = -js \Rightarrow \qquad |H(s)|^2 = \frac{1}{1+(-1)^N s^{2N}}$$

Les pôles sont tels que : $1+(-1)^N s^{2N} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \ldots \quad \leftrightarrow \quad s_n = e^{j\frac{N-1+2n}{2N}\pi}$

$$\leftrightarrow \quad s_n = -\sin\left(\frac{2n+1}{2N}\pi\right) + j\cos\left(\frac{2n+1}{2N}\pi\right) \qquad 0 \le n \le 2N-1$$

Il y a 2N pôles (2 fois plus que l'ordre du filtre), ce qui est normal puisqu'on a recherché les pôles de $|H(j\omega)|^2$

Filtre de Butterworth : étude des pôles (2)

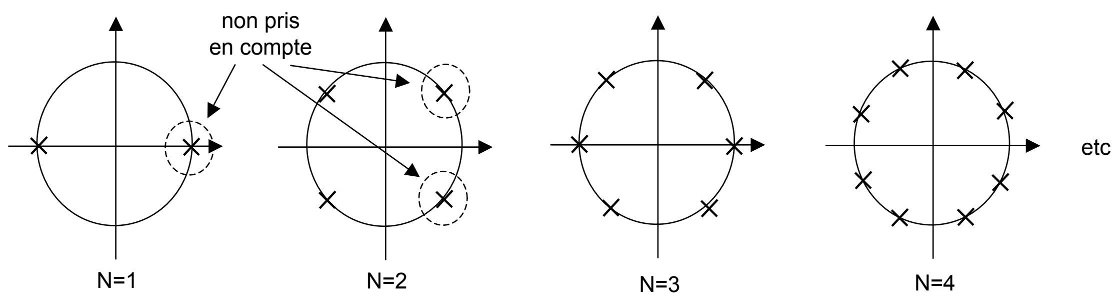
Position des pôles

La fonction $|H(j\omega)|^2$ possède 2N pôles ; ils sont situés sur le cercle unité ;

$0 \le n \le N-1$: à partie réelle <0

$N \le n \le 2N-1$: à partie réelle >0

Chaque pôle à partie réelle négative possède un "homologue" à partie réelle >0. Ces derniers, qui ne correspondent pas à un système stable, ne sont pas pris en compte (on a vu précédemment que la cellule passe-bas du 1er ordre et celle du 2e ordre, pour $\xi = \sqrt{2}/2$ possédaient respectivement 1 et 2 pôles à partie réelle <0 ; la généralisation à l'ordre N consiste à ne garder que les pôles à partie réelle <0 : ce sont les pôles de H(jω), même si cette dernière n'est pas définie directement).



Le pôle réel pur, quand il existe, correspond à une cellule du 1er ordre.

Les autres pôles existent par paires : 1 pôle + son conjugué ;

Filtre de Butterworth : exemple d'ordre 2

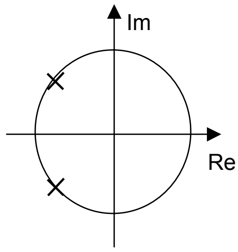
Exemple : Filtre de Butterworth d'ordre 2 (passe-bas)

N=2 → 2 pôles :

$$s_n = -\sin\left(\frac{2n+1}{2N}\pi\right) + j\cos\left(\frac{2n+1}{2N}\pi\right) \qquad n = 0,1$$

$$s_0 = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + j\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$s_1 = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - j\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = s_0^* = -\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}$$



On retrouve bien les 2 pôles calculés précédemment.

Différentes formes de la fonction de transfert :

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^4}} \quad \text{ou} \quad |H(p)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{p}{\omega_c}\right)^4}} \quad \text{ou} \quad |H(s)| = \frac{1}{\sqrt{1+s^4}}$$

Réalisation pratique : mise sous forme standard

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \qquad \text{(déjà étudiée précédemment)}$$

Filtre de Butterworth : exemple d'ordre 4

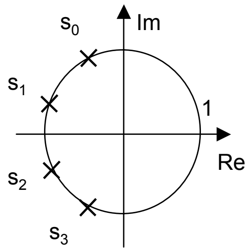
Exemple : Filtre de Butterworth passe-bas d'ordre 4

N=4 → 4 pôles :

$$s_n = -\sin\left(\frac{2n+1}{2N}\pi\right) + j\cos\left(\frac{2n+1}{2N}\pi\right) \qquad n = 0,...,3$$

$$s_0 = -\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) + j\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \qquad s_1 = -\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) + j\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$s_2 = -\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) + j\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) = s_1^* \qquad s_3 = -\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) + j\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) = s_0^*$$



$$H(s) = \prod_{n=0}^{3} \frac{1}{s-s_n} = \frac{1}{s-s_0}.\frac{1}{s-s_1}.\frac{1}{s-s_2}.\frac{1}{s-s_3}$$

Réalisation pratique : mise sous forme de 2 fonctions de transfert standard du 2^{e} ordre

$$H(s) = \frac{1}{(s-s_0)(s-s_0^*)(s-s_1)(s-s_1^*)} = \frac{1}{s^2 - s(s_0+s_0^*) + s_0 s_0^*}.\frac{1}{s^2 - s(s_1+s_1^*) + s_1 s_1^*} = ...$$

$$= \frac{1}{s^2 + 0{,}765s + 1}.\frac{1}{s^2 + 1{,}848s + 1} = H_1(s).H_2(s)$$

Filtre de Butterworth : polynômes

Polynômes de Butterworth

Une fois les pôles de la fonction de transfert calculés, les pôles complexes conjugués sont regroupés ensemble.
Chaque paire correspond à une cellule élémentaire (passe-bas) du 2e ordre.
Le pôle simple réel, s'il existe (ordre impair), correspond à la cellule élémentaire (passe-bas) du 1er ordre.

Forme développée

n=1 : $s+1$
n=2 : $s^2+1{,}41s+1$
n=3 : s^3+2s^2+2s+1
n=4 : $s^4+2{,}6131s^3+3{,}4142s^2+2{,}6131s+1$
n=5 : $s^5+3{,}2361s^4+5{,}2361s^3+5{,}2361s^2+ 3{,}2361s+1$
n=6 : $s^6+3{,}8537s^5+7{,}4741s^4+9{,}1416s^3+7{,}4741s^2+3{,}8537s+1$
etc

Forme factorisée

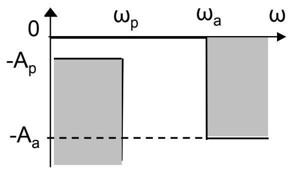
n=1 : $s+1$
n=2 : $s^2+1{,}41s+1$
n=3 : $(s+1)(s^2+s+1)$
n=4 : $(s^2+0{,}765s+1)(s^2+1{,}848s+1)$
n=5 : $(s+1)(s^2+0{,}618s+1)(s^2+1{,}618s+1)$
n=6 : $(s^2+1{,}932s+1)(s^2+1{,}414s+1)(s^2+0{,}518s+1)$
etc

Butterworth avec gabarit

Définition d'un gabarit

(On parle également de "synthèse sur cahier des charges")

On distingue la bande passante de la bande d'atténuation (ou coupée).
On définit l'atténuation maximale (A_p) tolérée dans la bande passante, et l'atténuation minimale tolérée dans la bande d'arrêt (A_a).



$\frac{\omega_a}{\omega_p}$: sélectivité

Dans le cas classique, A_p=3dB. On peut souhaiter une atténuation A_p moins importante. Il suffit d'ajouter un paramètre supplémentaire dans la fonction de transfert de Butterworth :

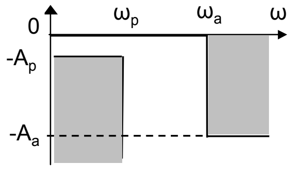
$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2N}} \qquad 0 \le \varepsilon \le 1$$

ou

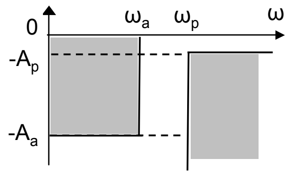
$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2\Omega^{2N}} \qquad \Omega = \frac{\omega}{\omega_p} \quad \text{pulsation réduite}$$

Gabarits

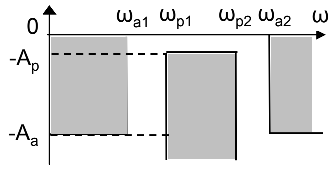
Autres gabarits



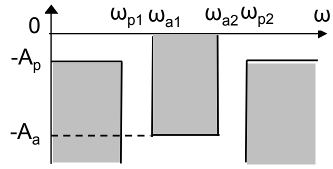
passe-bas



passe-haut



passe-bande



coupe-bande

Remarque

Pour la transformation de gabarits passe-bas vers passe-bande ou coupe-bande, ces derniers doivent être symétriques.
Si ça n'est pas le cas, il faut des rendre symétrique (en les rendant plus sévères).
La condition de symétrie est :

$$f_{p1} . f_{p2} = f_{a1} . f_{a2}$$

Paramètres du filtre de Butterworth à partir du gabarit

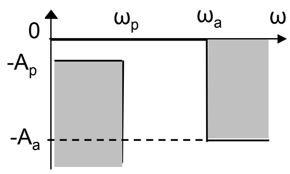
Définition d'un gabarit

On part du gain en dB :

$$20 \log |H(\Omega)| = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 \Omega^{2N}}} \qquad \Omega = \frac{\omega}{\omega_p}$$

Soit A_p le gain à la pulsation $\omega = \omega_p$, (soit $\Omega = 1$) on peut démontrer (*) que l'on a :

$$\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}$$



On peut démontrer (**) que l'ordre du filtre est donné par :

$$N = \frac{\log\left(10^{\frac{A_a}{10}} - 1\right) - 2\log \varepsilon}{2 \log \Omega_a} \qquad \Omega_a = \frac{\omega_a}{\omega_p}$$

Le résultat peut être fractionnaire ; l'ordre choisi est l'entier supérieur.

On peut démontrer que la fréquence de coupure à –3dB est liée à la fréquence f_p par la relation : $\omega_c = \frac{\omega_p}{\sqrt[N]{\varepsilon}}$

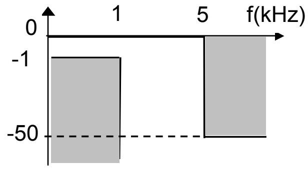
(*) il suffit d'imposer que le gain soit –Ap dB pour $\omega = \omega_p$; on a alors $\Omega_{2N} = 1$, et la seule inconnue est ε.

(**) on impose que la courbe passe par le point (ω_p, $-A_a$). Connaissant ε, la seule inconnue est N.

Butterworth à partir d'un gabarit : exemple

Exemple : Détermination d'un filtre dont le gain est atténué de 1dB à la fréquence f_a=1kHz et de 50dB à f_r=5kHz

$$\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1} = \sqrt{10^{\frac{1}{10}} - 1} = 0{,}509$$



Pulsation réduite d'atténuation en bande coupée Ω_a :

$$\Omega_a = \frac{\omega_a}{\omega_p} = \frac{f_a}{f_p} = \frac{5\text{kHz}}{1\text{kHz}} = 5$$

Ordre du filtre :

$$N = \frac{\log\left(10^{\frac{A_a}{10}} - 1\right) - 2\log\varepsilon}{2\log\Omega_a} = \frac{\log\left(10^{\frac{50}{10}} - 1\right) - 2\log 0{,}509}{2\log 5} = 3{,}99$$

On prend pour l'ordre l'entier supérieur : N=4.

La fonction de transfert du filtre est la suivante :

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2N}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0{,}259\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{8}}}$$

Autre exemple : en prenant f_a=2kHz, on aurait trouvé un ordre N=10

Filtre de Butterworth généralisé : détermination des pôles

Détermination des pôles

$$|H(s)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 s^{2N}}$$

$$s = j\frac{\omega}{\omega_c} \leftrightarrow \frac{\omega}{\omega_c} = -js \Rightarrow \qquad |H(s)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 (-1)^N s^{2N}}$$

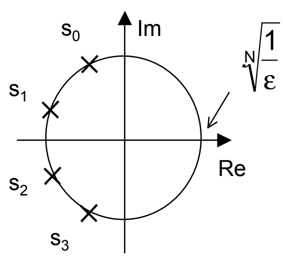
$$1 + \varepsilon^2(-1)^N s^{2N} = 0 \qquad s_n = \sqrt[N]{\frac{1}{\varepsilon}}\, e^{j\frac{N-1+2n}{2N}\pi}$$

Rappel : uniquement les pôles à partie réelle <0

$$s_n = \sqrt[N]{\frac{1}{\varepsilon}}\left[-\sin\left(\frac{2n-1}{2N}\pi\right) + j\cos\left(\frac{2n-1}{2N}\pi\right)\right]$$

$$0 \le n \le N-1$$

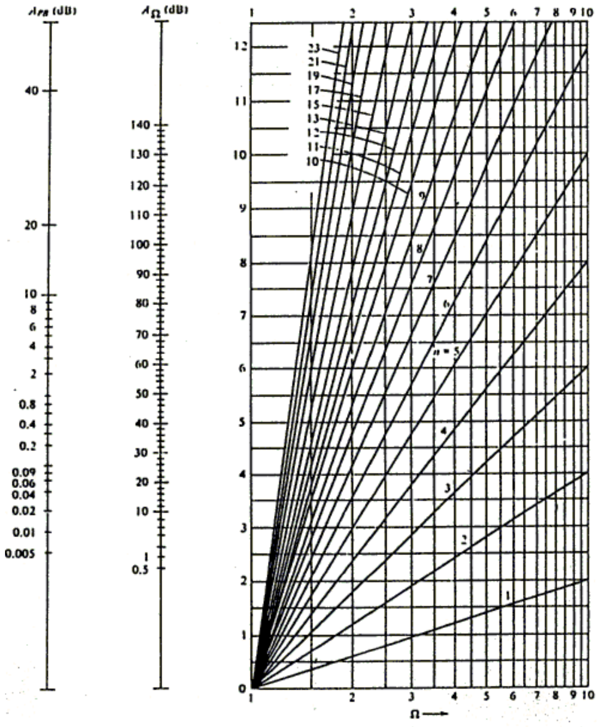
Les arguments des pôles sont les mêmes que ceux de la fonction de transfert simplifiée avec ε=1, mais situés sur un cercle de rayon $\sqrt[N]{1/\varepsilon}$

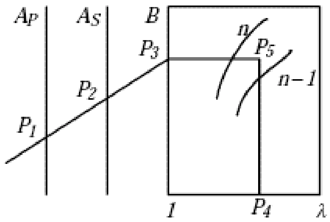


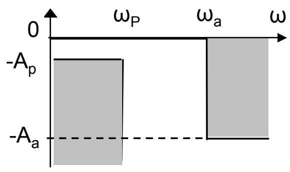
Butterworth : utilisation d'abaques

Utilisation d'abaques

Elles permettent de déterminer l'ordre du filtre en fonction des paramètres A_p, A_a, ω_p et ω_a.





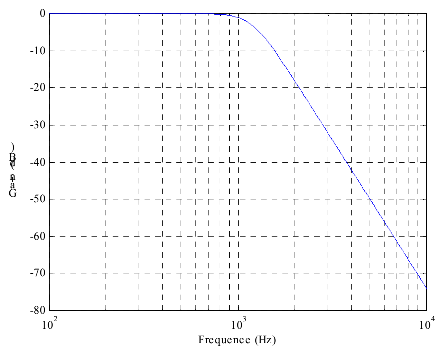


$$\lambda = \frac{\omega_a}{\omega_p}$$

Butterworth avec Matlab

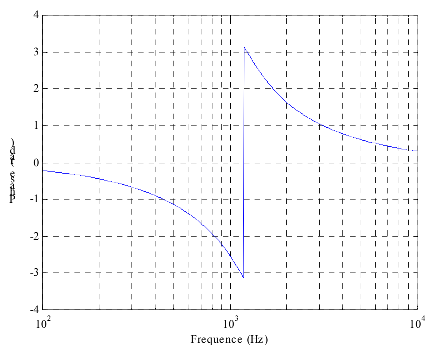
Programmation Matlab

```
%Réponse en fréquence d'un filtre de Butterworth
[N,Wn]=buttord(1000,5000,1,50,'s')
[b,a]=butter(N,Wn,'s');
F=[100:1:10000];                    %vecteur de fréquences
[hb,bc]=freqs(b,a,F);               %calcul réponse en fréquence
semilogx(bc,20*log10(abs(hb)));     %affichage avec axe des abs. log.
xlabel('Frequence (radians)');
ylabel('Gain (dB)');
grid;
```



Pour la phase :

```
...
 semilogx(bc,angle(hb));
...
```



Filtres de Chebyshev (ou Tchebyscheff)

Définition

Il existe 2 types :

Type I : $|H(\omega)|^2 = \dfrac{1}{1+\varepsilon^2 T_N^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_p}\right)}$ $\quad \varepsilon < 1$

Type II : $|H(\omega)|^2 = \dfrac{\varepsilon^2 T_N^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_p}\right)}{1+\varepsilon^2 T_N^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_p}\right)}$ $\quad \varepsilon < 1$

avec Ω pulsation réduite :

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_p}$$

$T_N(.)$ désigne un polynôme d'ordre N défini par :

$$T_N(\omega) = \mathrm{Re}[\omega + j\sqrt{1-\omega^2}]^N \quad ....$$

Les premiers polynômes sont donc :

$$T_0(\omega) = \mathrm{Re}[\omega + j\sqrt{1-\omega^2}]^0 = 1$$
$$T_1(\omega) = \mathrm{Re}[\omega + j\sqrt{1-\omega^2}] = \omega$$
$$T_2(\omega) = \mathrm{Re}[\omega + j\sqrt{1-\omega^2}]^2 = 2\omega^2 - 1$$

On peut démontrer (*) qu'il existe une relation de récurrence entre ces polynômes :

$$T_N(\omega) = 2\omega.T_{N-1}(\omega) - T_{N-2}(\omega)$$

(*) la démonstration consiste à exprimer $T_{N+1}(\omega)$ et à utiliser les formules de trigonométrie :

$\cos(a+b) = \cos(a).\cos(b) - \sin(a).\sin(b)$ et $\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a).\mathrm{ch}(b) - \mathrm{sh}(a).\mathrm{sh}(b)$

Filtres de Chebyshev (ou Tchebyscheff)

Définition

Les polynômes $T_N(.)$ sont également définis par :

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N.\arccos(x)) & \text{si } |x| \le 1 \\ \mathrm{ch}(N.\mathrm{argch}(x)) & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

Rappel :

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

On peut démontrer que la fréquence de coupure à –3dB est liée à la fréquence f_p par la relation :

$$\omega_c = \omega_p \cosh\left(\frac{1}{n} a\cosh\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$$

Filtres de Chebyshev : caractéristiques

Caractéristiques

Type I

Oscillations dans la bande passante (band-pass ripple)

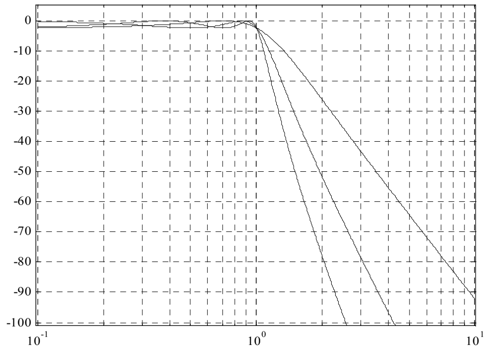
$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \le |H(\omega)| \le 1$$

Soit N l'ordre du polynôme du dénominateur ;

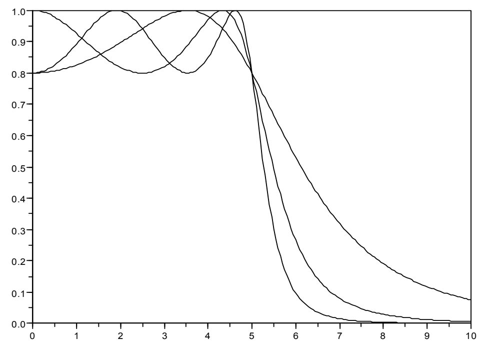
- si N pair, |H(0)|=0 ; si N impair, $|H(0)| = 1/\sqrt{1+\varepsilon^2}$

- Pour ω <=ω_c, |H(jω)| oscille N/2 fois entre 1 et $1/\sqrt{1+\varepsilon^2}$

- Pour ω>ω_c, |H(jω)| est monotone et décroissante.



20log|H(jω)| (N=2,3,4)



|H(jω)| (N=2,3,4)

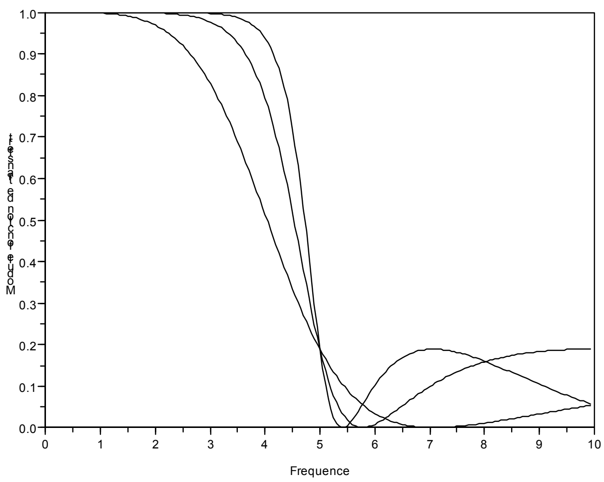
Filtres de Chebyshev : caractéristiques

Caractéristiques

Type II

Oscillations dans la bande atténuée (ou coupée) (stop-band ripple)

$$0 \le |H(\omega)| \le \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$$



Paramètres du filtre de Chebyshev à partir du gabarit

Définition

On part du gain en dB :

$$20\log\left|H(\Omega)\right| = 20\log\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 T_N^2(\Omega)}} \qquad \Omega = \frac{\omega}{\omega_p}$$

On peut montrer que le paramètre est défini par :

$$\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}$$ où A_p est l'atténuation à ω_p

et que l'ordre N du filtre est donné par :

$$N = \frac{\operatorname{argch}\dfrac{\sqrt{10^{\frac{A_a}{10}}-1}}{\varepsilon}}{\operatorname{argch}(\Omega_a)} \qquad \Omega_a = \frac{\omega_a}{\omega_p}$$

où Ω_a est la pulsation réduite d'atténuation minimale en bande atténuée.

Filtres de Chebyshev : caractéristiques

Etude des pôles

Les pôles sont définis par :

$$s_k = \sin(\alpha_k)\mathrm{sh}(\beta) + j\cos(\alpha_k)\mathrm{ch}(\beta) \qquad 0 \le k \le 2N-1$$

avec $\alpha_k = \dfrac{\pi}{2N} + k\dfrac{\pi}{N}$ et $\beta = \dfrac{1}{N}\operatorname{argsh}\dfrac{1}{\varepsilon}$ (=cte)

Comme dans le cas de Butterworth, on ne prend en compte que la moitié des pôles : ceux à partie imaginaire <0.

En posant $\mathrm{Re}_k = \sin(\alpha_k)\mathrm{sh}(\beta)$ $\qquad \mathrm{Im}_k = \cos(\alpha_k)\mathrm{ch}(\beta)$

et en se souvenant que $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, on voit que $\dfrac{\mathrm{Re}_k^2}{\mathrm{sh}^2(\beta)} + \dfrac{\mathrm{Im}_k^2}{\mathrm{ch}^2(\beta)} = 1$

ce qui est la définition d'une ellipse, $\mathrm{sh}^2(\beta)$ et $\mathrm{ch}^2(\beta)$ étant des constantes (voir ci-dessous).

Les pôles sont donc situés sur une ellipse.

Rappel : dans un repère (x,y), une ellipse est définie par $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; a et b sont les 2 rayons de l'ellipse.

Filtres de Chebyshev : caractéristiques

Etude des pôles : exemple avec N=2

Les pôles sont définis par :

$$s_k = \sin(\alpha_k)\mathrm{sh}(\beta) + j\cos(\alpha_k)\mathrm{ch}(\beta) \qquad 0 \le k \le 3$$

On a :

$$\beta = \frac{1}{N}\mathrm{argsh}\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{N}\mathrm{argsh}\frac{1}{0{,}509} \approx \frac{1}{2}\mathrm{argsh}2 \approx 0{,}17 \qquad \mathrm{sh}(\beta) \approx 0{,}17 \qquad \mathrm{ch}(\beta) \approx 1$$

et

$$\alpha_k = \frac{\pi}{2N} + k\frac{\pi}{N}, \text{ soit } \alpha_0 = \frac{\pi}{4} \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4} \quad \alpha_3 = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} = \frac{7\pi}{4}$$

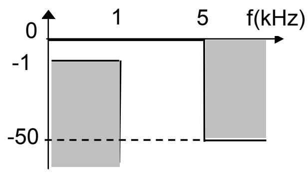
d'où

$$s_0 = 0{,}17\sin(\frac{\pi}{4}) + j\cos(\frac{\pi}{4}) \qquad s_1 = 0{,}17\sin(\frac{3\pi}{4}) + j\cos(\frac{3\pi}{4}) = 0{,}17\sin(\frac{3\pi}{4}) + j\cos(\frac{3\pi}{4})$$

Les pôles sont donc situés sur une ellipse de rayons sh(β)≈0,17 et ch(β)≈1 .

Filtres de Chebyshev : exemple avec type I

Exemple avec type I : Gain atténué de 1dB à f_a=1kHz et de 50dB à f_r=5kHz



$$\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1} = \sqrt{10^{\frac{1}{10}} - 1} = 0{,}509$$

Pulsation réduite d'atténuation en bande coupée :

$$\Omega_a = \frac{\omega_a}{\omega_p}$$

Ordre du filtre :

$$N = \frac{\mathrm{argch}\dfrac{\sqrt{10^{\frac{A_a}{10}} - 1}}{\varepsilon}}{\mathrm{argch}(\Omega_a)} = \frac{\mathrm{argch}\dfrac{\sqrt{10^{\frac{50}{10}} - 1}}{\varepsilon}}{\mathrm{argch}(5)} = 2{,}1$$

On prend pour l'ordre l'entier supérieur : N=3.

Fonction de transfert du filtre :

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + 0{,}26T_3^2\left(\dfrac{\omega}{2.10^3.\pi}\right)^2} = \frac{1}{1 + 0{,}26\left(4\left(\dfrac{\omega}{2.10^3\pi}\right)^3 - 3\left(\dfrac{\omega}{2.10^3\pi}\right)\right)^2}$$

Autre exemple : en prenant f_a=2kHz, on aurait trouvé N=3,66 (⟶ N=4)

Remarque : l'ordre est inférieur à celui du filtre de Butterworth équivalent.

Polynômes de Chebyshev

Polynômes de Chebyshev

Les coefficients du polynômes sont donnés en fonction de A_p (en général, on prend 0,5 ou 1) et de l'ordre du filtre N.

Pour A_p=1dB :

Forme développée

n=1 : $0{,}509s+1$
n=2 : $0{,}907s^2+0{,}9957s+1$
n=3 : $2{,}0353s^3+2{,}0116s^2+2{,}5206s+1$
n=4 : $3{,}628s^4+3{,}4568s^3+5{,}2749s^2+2{,}6942s+1$
n=5 : $8{,}1415s^5+7{,}6271s^4+13{,}75s^3+7{,}933s^2+4{,}7264s+1$
n=6 : $14{,}512s^6+13{,}47s^5+28{,}02s^4+17{,}445s^3+13{,}632s^2+4{,}456s+1$
etc

Forme factorisée

n=1 : $0{,}509s+1$
n=2 : $0{,}907s^2+0{,}996s+1$
n=3 : $(2{,}024s+1)(1{,}006s^2+0{,}497s+1)$
n=4 : $(3{,}579s^2+2{,}411s+1)(1{,}014s^2+0{,}283s+1)$
n=5 : $(3{,}454s+1)(2{,}329s^2+1{,}091s+1)(1{,}012s^2+0{,}181s+1)$
n=6 : $(8{,}019s^2+3{,}722s+1)(1{,}793s^2+0{,}609s+1)(1{,}009s^2+0{,}126s+1)$
etc

Remarque : contrairement aux polynômes de Butterworth, les cellules élémentaires de la forme factorisée ne possèdent pas ici toutes la même fréquence de coupure.

Filtres de Bessel : principe (1)

Filtres de Bessel

Les filtres de Bessel sont basés sur le critère de la plus grande linéarité possible de la phase (en fonction de la fréquence).

On rappelle l'intérêt d'avoir une phase linéaire : le signal n'est pas déformé par le filtre.

On définit le retard de groupe :

$$t_g = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$$

Si la phase est linéaire, le retard de groupe est constant.

On définit donc une fonction de transfert (FT) :

$$H(p) = e^{-\tau p} \qquad H(j\omega) = e^{-j\omega\tau} \qquad \text{avec } \tau \text{ constant}$$

Pour simplifier, on prend τ =1 :

$$H(p) = e^{-p}$$

On cherche ensuite à mettre la FT sous forme passe-bas (on cherche à faire apparaître ses pôles) :

$$H(p) = \frac{1}{\frac{e^p + e^{-p}}{2} + \frac{e^p - e^{-p}}{2}} = \frac{1}{ch(p) + sh(p)}$$

Filtres de Bessel : principe (2)

Filtres de Bessel

Pour déterminer le polynôme équivalent au dénominateur, on utilise la "technique" suivante : on exprime le développement limité de cth(p)=ch(p)/sh(p), on effectue la division des polynômes puis on identifie numérateur et dénominateur resp. à ch(p) et sh(p).

$$\mathrm{cth}(p)=\frac{\mathrm{ch}(p)}{\mathrm{sh}(p)}=\frac{1+\frac{p^2}{2!}+\frac{p^4}{4!}+\ldots}{1+\frac{p^3}{3!}+\frac{p^5}{5!}+\ldots}=\frac{1}{p}+\frac{1}{\frac{3}{P}+\frac{1}{\frac{5}{p}+\ldots}}$$

En limitant le développement limité à l'ordre N, on obtient une expression approchée de cth(p).

Pour N=2, on a :

$$\mathrm{cth}(p)=\frac{1}{p}+\frac{1}{\frac{3}{p}}=\frac{3+p^2}{3p}$$

Par identification, on trouve : $\mathrm{ch}(p)=3+p^2$ et $\mathrm{sh}(p)=3p$ d'où $H(p)=\frac{1}{\mathrm{ch}(p)+\mathrm{sh}(p)}=\frac{1}{3+3p+p^2}$

Pour N=3, on a

$$\mathrm{cth}(p)=\frac{1}{p}+\frac{1}{3/p+1/5/p}=\frac{15+6p^2}{15p+p^3}$$

Par identification, on trouve : $\mathrm{ch}(p)=15+6p^2$ et $\mathrm{sh}(p)=15p+p^3$ d'où $H(p)=\frac{1}{\mathrm{ch}(p)+\mathrm{sh}(p)}=\frac{1}{15+15p+6p^2+p^3}$

etc.

Pour l'ordre n, on a : $H(p)=\frac{1}{B_n(p)}=\frac{1}{a_0+a_1p+a_2p^2+\ldots+a_np^n}$ avec

$$B_0=1$$
$$B_1(p)=p+1$$
$$B_n(p)=(2n-1)B_{n-1}(p)+p^2B_{n-2}(p)$$

Filtres de Bessel : normalisation

Normalisation

En considérant la fréquence normalisée pour ω/ω_c avec ω_c telle que 20log|H(ω_c)|=-3dB, on a :

$$\left|a_0+a_1p+a_2p^2+\ldots+a_np^n\right|=10^{\frac{3}{20}}$$

Par exemple pour N=2, le polynôme du dénominateur est :

$$3+3p+p^2$$

On le transforme en polynôme standard (en mettant en facteur le terme constant, qui représente un gain statique) :

$$1+p+\frac{1}{3}p^2$$

La pulsation normalisée $\omega=\omega_c$ permettant d'avoir une atténuation de –3dB est telle que

$$\left|1+p+\frac{1}{3}p^2\right|=10^{\frac{3}{20}}\quad\leftrightarrow\quad\left|1+j\omega_c+\frac{1}{3}(j\omega_c)^2\right|=10^{\frac{3}{20}}\quad\leftrightarrow\ldots\leftrightarrow\quad\omega_c=1{,}359$$

La fonction de transfert normalisée devient donc :

$$H(p)=\frac{1}{1+1{,}359p+\frac{1}{3}(1{,}359p)^2}=\frac{1}{1+1{,}359p+0{,}6149p^2}$$

Polynômes de Bessel

Coefficients des polynômes du dénominateur

Forme développée (normalisée)

n=1 : $s+1$
n=2 : $0{,}618s^2+1{,}359s+1$
n=3 : $0{,}3607s^3+1{,}2328\, s^2+1{,}7556s+1$
n=4 : $0{,}1901s^4+0{,}8995s^3+1{,}9149s^2+2{,}1138\, s+1$
n=5 : $0{,}08911s^5+0{,}5506s^4+1{,}588s^3+2{,}6174s^2 2{,}4266s+1$

Forme factorisée

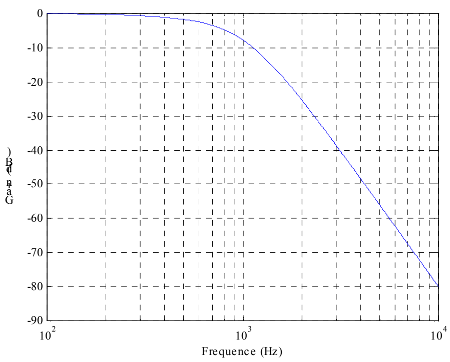
n=1 : $s+1$
n=2 : $0{,}618s^2+1{,}359s+1$
n=3 : $(1{,}3225s+1)(0{,}4773s^2+0{,}9998s+1)$
n=4 : $(0{,}4883s^2+1{,}3389s+1)(0{,}3885s^2+0{,}7738s+1)$
n=5 : $(1{,}5015s+1)(0{,}4133s^2+1{,}1408s+1)(0{,}3885s^2+0{,}7738s+1)$

Il n'existe pas de méthode analytique pour permettre de déterminer les coefficients a_i en fonction d'un gabarit.
Ces coefficients sont obtenus par approximations successives, par des méthodes graphiques ou des algorithmes numériques

Filtres de Bessel : programmation Matlab

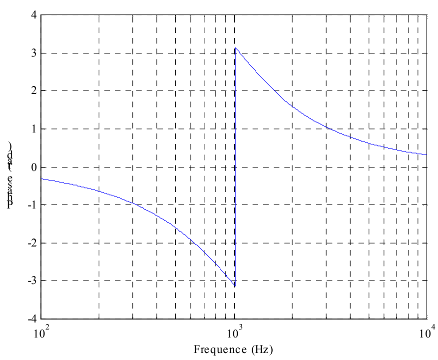
Programmation Matlab

```
%Réponse en fréquence d'un filtre de Butterworth
[b,a]=besself(4,1000)
F=[100:1:10000];                    %vecteur de fréquences
[hb,bc]=freqs(b,a,F);               %calcul réponse en fréquence
semilogx(bc,20*log10(abs(hb)));     %affichage avec axe des abs. log
xlabel('Frequence (radians)');
ylabel('Gain (dB)');
grid;
```



Pour la phase :

```
...
semilogx(bc,angle(hb));
...
```



Filtres de Cauer : introduction

Filtres de Cauer

Introduction

Les filtres étudiés jusqu'ici (Butterworth, Chebyshev, Bessel) étaient tous sous la forme :

$$H(p) = \frac{1}{D(p)} = \frac{1}{a_0 + a_1 p + a_2 p + ... + p^n}$$

On les appelle filtres polynômiaux. Ils sont caractérisés par leurs pôles. On parle de filtres "tous pôles".

D(p) est appelée fonction de transmission.

Il existe également des filtres qui possèdent en plus un polynôme au numérateur.

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p + ... + p^m}{a_0 + a_1 p + a_2 p + ... + p^n}$$

On les appelle filtres elliptiques. C'est le cas du filtre de Cauer.

En plus de ses pôles, cette fonction de transfert possède des zéros (valeurs de p qui annulent la fonction de transfert).

Ces zéros correspondent à des fréquences pour lesquelles la fonction de transfert est nulle, et donc un signal à cette fréquence est éliminé.

S'ils sont judicieusement placés dans le plan complexe, ils permettent d'augmenter les pentes de variation du gain, par rapport aux filtres polynômiaux.

Filtres de Cauer : définition

Filtres de Cauer

Ils sont définis par la fonction de transfert suivante :

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 R_N^2(\xi, \omega / \omega_0)}$$

où $R_N(\xi,\omega/\omega_0)$ est appelée fonction rationnelle de Chebyshev; N est l'ordre du filtre, ω_0 la pulsation de coupure, ε est le facteur d'ondulation et ξ est le facteur de sélectivité.

Dans la bande passante, le gain varie donc entre 1 et $1/\sqrt{1+\varepsilon^2}$

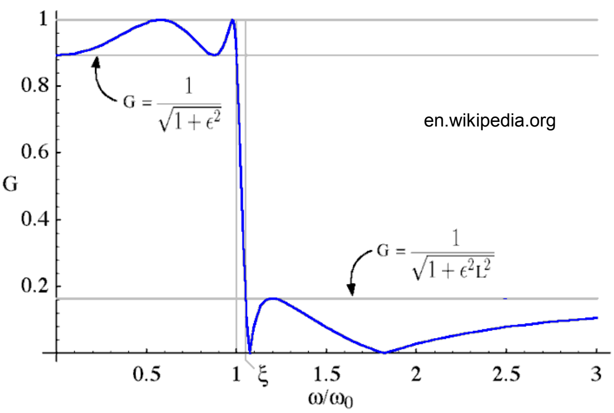
Dans la bande atténuée, le gain varie donc entre 0 et $1/\sqrt{1+\varepsilon^2 L_N^2}$, avec $L_N = R_N(\xi,\xi)$

La fonction R_N est appelée fonction elliptique.

Ces filtres sont caractérisés par des oscillations à la fois dans la bande passante et dans la bande coupée.

La décroissance de leur gain est plus rapide que celle des filtres polynômiaux, avec un ordre inférieur

Quand $\xi \rightarrow \infty$, le filtre devient équivalent à un filtre de Chebyshev de type I.



en.wikipedia.org

Filtres de Cauer

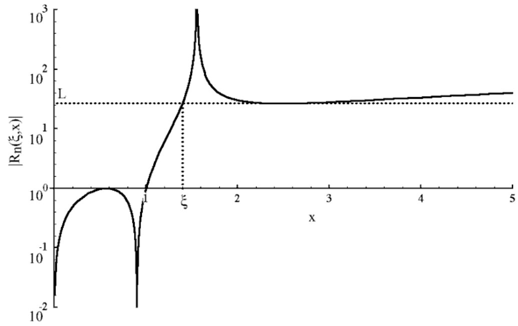
La fonction elliptique peut se mettre sous la forme suivante :

$$R_N(\xi,x) = r_0 \frac{\prod_{i=1}^{N}(x-x_i)}{\prod_{i=1}^{N}(x-x_{pi})} \quad \text{pour N pair} \qquad R_N(\xi,x) = x r_0 \frac{\prod_{i=1}^{N}(x-x_i)}{\prod_{i=1}^{N}(x-x_{pi})} \quad \text{pour N impair}$$

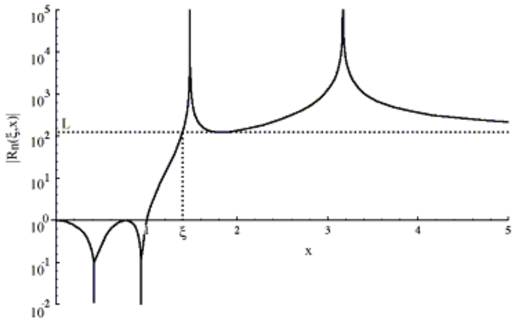
avec x_i les zéros et x_{pi} les pôles de ces rationnelles, et r_0 un facteur de normalisation tel que $R_N(\xi,1)=1$

Le dénominateur de ce polynôme fait apparaître des zéros dans la fonction de transfert du filtre.

Ils sont appelés zéros de transmission, et ont la propriété d'éliminer les fréquences correspondantes.



$R_N(\xi,x)$ avec N=3 ; ξ=1,3



$R_N(\xi,x)$ avec N=4 ; ξ=1,3

Filtres de Cauer

Il n'existe pas d'expression analytique pour les pôles et les zéros de la fonction de transfert du filtre.
Ils sont calculés par des méthodes numériques.

La synthèse comporte les étapes suivantes :

1. Détermination de l'ordre N en fonction du gabarit
2. Détermination du polynômes du numérateur et du dénominateur
3. Détermination des pôles et des zéros

Exemple Matlab

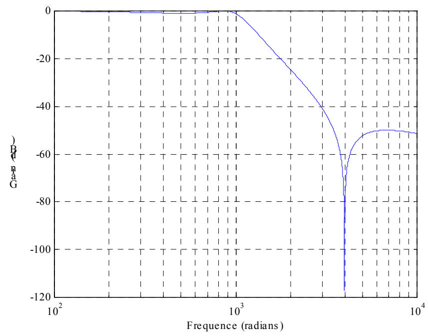
```
fp=1000; fa=2000; Ap=1; Aa=40;
[N,Wn]=ellipord(fp,fa,Ap,Aa,'s')    %étape 1
[num,den]=ellip(N,1,50,Wn,'s')      %étape 2
zeros=roots(num)                    %étape 3
poles=roots(den)                    %étape 3
```

Une fois les pôles et les zéros connus, on peut écrire la fonction de transfert sous forme d'un produit de fonctions de transfert élémentaires du 1^{er} et du 2^{e} ordre (en regroupant les pôles et les zéros conjugués entre eux).
On peut alors passer à la réalisation électronique.

Filtres de Cauer : programmation Matlab

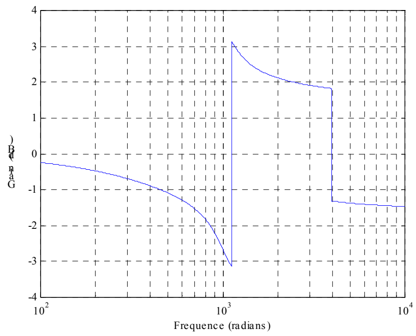
Programmation Matlab

```
%Réponse en fréquence d'un filtre de Cauer (elliptique)
  [N,Wn]=ellipord(1000,5000,1,50,'s')
  [b,a]=ellip(N,1,50,Wn,'s');
  F=[100:1:10000];                    %vecteur de fréquences
  [hb,bc]=freqs(b,a,F);               %calcul réponse en fréquence
  semilogx(bc,20*log10(abs(hb)));     %affichage avec axe des abs. log.
  xlabel('Frequence (radians)');
  ylabel('Gain (dB)');
  grid;
```



Pour la phase :

```
 ...
  semilogx(bc,angle(hb));
 ...
```

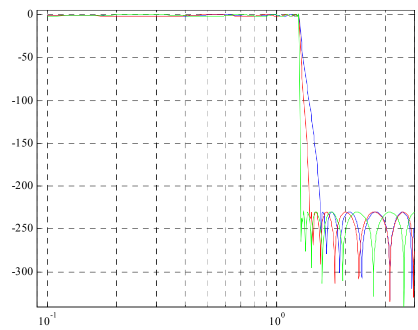


Filtres de Cauer : programmation Matlab

Caractéristiques

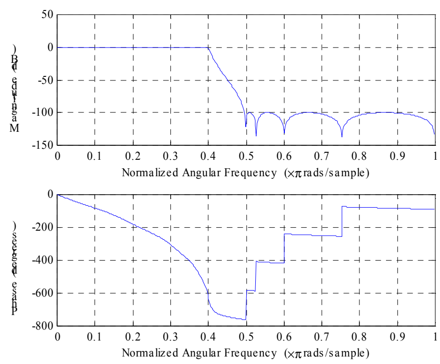
Affichage du gain en dB et de la phase en échelle semi-log :

```
f=[0.1:0.01:4];
[n,wn]=ellipord(0.4,0.5,1,100)  %-99dB entre f/fe=0,4 et 0,5
[b,a]=ellip(n,1,100,wn);         % -> ordre 9
[H,fl]=freqz(b,a,f);
semilogx(fl,20*log(abs(H)),'b');
hold;
[n,wn]=ellipord(0.4,0.45,1,100) %-99dB entre f/fe=0,4 et 0,45
[b,a]=ellip(n,1,100,wn);         % -> ordre 11
[H,fl]=freqz(b,a,f);
semilogx(fl,20*log(abs(H)),'r');
[n,wn]=ellipord(0.4,0.41,1,100) %-99dB entre f/fe=0,4 et 0,41
[b,a]=ellip(n,1,100,wn);         % -> ordre 16
[H,fl]=freqz(b,a,f);
semilogx(fl,20*log(abs(H)),'g');
```



Un affichage de |H(f)| en échelle linéaire permet de constater la non-linéarité de la phase (même dans la bande passante) :

```
[n,wn]=ellipord(0.4,0.5,1,100)
[b,a]=ellip(n,1,100,wn);
freqz(b,a);
```



Comparaison des performances des filtres de Butterworth, de Chebyshev de Bessel et de Cauer

Gain en dB

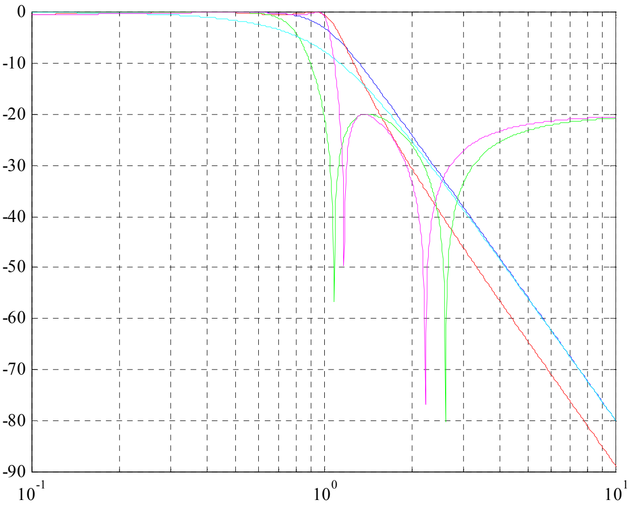
```
[z,p,k]=buttap(4);      %Butterworth ordre 4
w=logspace(-1,1,1000);  %1000 points entre 0.1 et 10
h=freqs(k*poly(z),poly(p),w);
semilogx(w,20*log(abs(h)),'b');    %bleu
hold;

[z,p,k]=cheb1ap(4,0.5);  %Chebyshev type I ordre 4
h=freqs(k*poly(z),poly(p),w);  %(0,5dB max en BP)
semilogx(w,20*log(abs(h)),'r');    %rouge

[z,p,k]=cheb2ap(4,20);   %Chebyshev type II ordre 4
h=freqs(k*poly(z),poly(p),w);   %(20dB min en BA)
semilogx(w,20*log(abs(h)),'g');    %vert

[z,p,k]=besselap(4);          %Bessel ordre 4
h=freqs(k*poly(z),poly(p),w);
semilogx(w,20*log(abs(h)),'c');    %cyan

[z,p,k]=ellipap(4,0.5,20);  %Cauer ordre 4
h=freqs(k*poly(z),poly(p),w); %(0,5dB max en BP et
semilogx(w,20*log(abs(h)),'m');  %20dB min en BA)
grid;                          %magenta
```



Gain en dB pour N=4

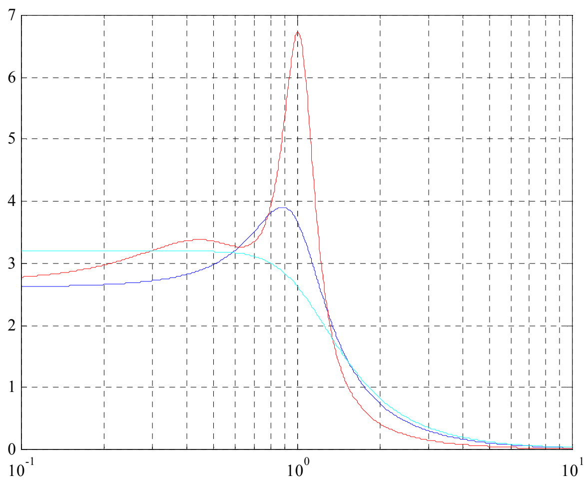
Comparaison des performances des filtres de Butterworth, de Chebyshev de Bessel et de Cauer

Délai de groupe

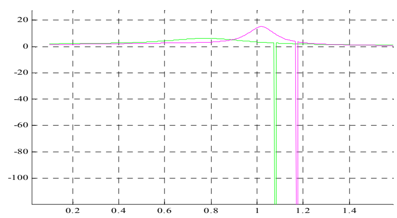
```
w=logspace(-1,1,1000);     %1000 points entre 0.1 et 10
[z,p,k]=buttap(4);         %Butterworth ordre 4
h=freqs(k*poly(z),poly(p),w);
dg=-diff(unwrap(angle(h)))./diff(w);   %délai de groupe
semilogx(w(1:length(w)-1),dg,'b');     %bleu
hold;

[z,p,k]=cheb1ap(4,0.5);    %Chebyshev type I ordre 4
h=freqs(k*poly(z),poly(p),w);          %(0,5dB max en BP)
dg=-diff(unwrap(angle(h)))./diff(w);   %délai de groupe
semilogx(w(1:length(w)-1),dg,'r');     %rouge
grid;

[z,p,k]=besselap(4);       %Bessel ordre 4
h=freqs(k*poly(z),poly(p),w);
dg=-diff(unwrap(angle(h)))./diff(w);   %délai de groupe
semilogx(w(1:length(w)-1),dg,'c');     %cyan
```



Remarque : le délai de groupe du filtre de Chebyshev de type II et du filtre de Cauer doit être affiché séparément :



our N=4

Butterworth, Chebyshev, Bessel

Comparaison des performances des filtres de Butterworth, de Chebyshev et de Cauer

Critères de choix selon type de filtre	Butterworth	Chebyshev	Bessel	Cauer
Facilité de conception	***	**	*	*
Raideur des pentes	*	**	*	***
Linéarité de la phase	**	*	***	*
Absence d'oscillations (BP)	***	**	***	*

Résumé des différentes étape de synthèse

Les différentes étapes de la synthèse d'un filtre analogique

1. Définition du gabarit désiré
2. Normalisation du gabarit par rapport à une pulsation de référence ω_r : $j\frac{\omega}{\omega_r} \to s$

   (- fréquence de coupure à –3dB pour un filtre de Butterworth de la forme simplifiée,
   - fréquence d'atténuation max. en bande passante pour un filtre de Butterworth et pour Chebyshev et Cauer,
   - fréquence centrale pour un filtre passe-bande ou coupe-bande)
3. Transposition en gabarit (normalisé) passe-bas
4. Détermination de l'ordre du filtre (calcul, abaques, logiciel…)
5. Recherche de la fonction de transfert normalisée (mise en facteur) à partir des tables de polynômes
6. Transposition du filtre passe-bas étudié vers le type de filtre recherché
7. Dénormalisation :

$$s \to j\frac{\omega}{\omega_r}$$

8. Réalisation électronique

Remarque : dans le cas de la synthèse d'un filtre passe-bas, les étapes 2 et 5 n'ont pas lieu d'être.

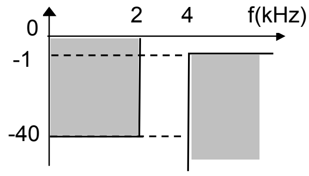
Exemple complet de synthèse

On souhaite réaliser un filtre passe-haut satisfaisant les contraintes suivantes :

-atténuation maximale en bande passante : A_p=1dB à f_p=4kHz

-atténuation minimale en bande atténuée : A_a=40dB à f_a=2kHz

et pour lequel on accepte une ondulation dans la bande passante de 1dB.



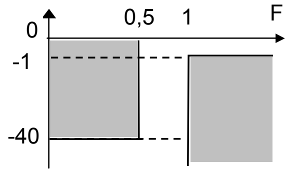
Normalisation du gabarit

On normalise les fréquences par rapport à f_p :

$f \longrightarrow F=f/f_p$

$f_p \longrightarrow F_p=f_p/f_p=1$

$f_a \longrightarrow F_a=f_a/f_p=0{,}5$



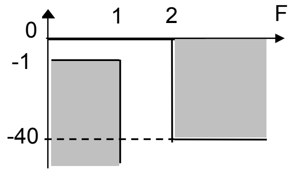
Gabarit passe-bas (normalisé) correspondant

Changement de variable de la transposition passe-bas vers passe-haut :

$$s \to \frac{1}{s} \quad \longleftrightarrow \quad \frac{j\omega}{\omega_p} \to \frac{\omega_p}{j\omega}$$

Pour $f=f_a$: $j\frac{f_a}{f_p} \to -j\frac{f_p}{f_a} \quad \longleftrightarrow \quad j0{,}5 \to -j2$

(on fait abstraction du signe -)



Exemple complet de synthèse

Détermination de l'ordre du filtre

$$N = \frac{\operatorname{argch}\dfrac{\sqrt{10^{\frac{A_a}{10}}-1}}{\varepsilon}}{\operatorname{argch}(\Omega_a)} \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}}-1} = \sqrt{10^{\frac{1}{10}}-1} = 0{,}509 \quad \text{et} \quad \Omega_a = \frac{\omega_a}{\omega_p} = 2$$

$$N = \frac{\operatorname{argch}(\sqrt{10^{A_a/10}-1})/0{,}509}{\operatorname{argch}(2)} = 4{,}5 \longrightarrow \text{on prend N=5}$$

Fonction de transfert normalisée à partir de la table des polynômes de Chebyshev

$$H(s) = \frac{1}{(3{,}454s+1)(2{,}329s^2+1{,}091s+1)(1{,}012s^2+0{,}181s+1)}$$

Transposition vers le type de filtre de départ (passe-haut)

$$s \to \frac{1}{s} \longrightarrow H(s) = \frac{0{,}29s}{0{,}29s+1} \times \frac{0{,}429s^2}{0{,}429s^2+0{,}468s+1} \times \frac{0{,}988s^2}{0{,}988s^2+0{,}179s+1}$$

Exemple complet de synthèse

Dénormalisation

$$s \rightarrow j\frac{\omega}{\omega_p} = j\frac{\omega}{2\pi f_p}$$

$$\longleftrightarrow \quad H(s) \quad \rightarrow \quad H(j\omega) = H_1(j\omega)\times H_2(j\omega)\times H_3(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{(\omega_c)_1}}{1+j\frac{\omega}{(\omega_c)_1}} \times \frac{\left(j\frac{\omega}{(\omega_c)_2}\right)^2}{1+j2\xi\frac{\omega}{(\omega_c)_2}+\left(j\frac{\omega}{(\omega_c)_2}\right)^2} \times \frac{\left(j\frac{\omega}{(\omega_c)_3}\right)^2}{1+j2\xi\frac{\omega}{(\omega_c)_3}+\left(j\frac{\omega}{(\omega_c)_3}\right)^2}$$

Identification :

$$(\omega_c)_1 = 86{,}665 \text{rad/s} \qquad (\omega_c)_2 = 38{,}372 \text{rad/s} \qquad (\omega_c)_3 = 25{,}285 \text{rad/s}$$

$$\longleftrightarrow \quad (f_c)_1 = 13{,}8 \text{Hz} \qquad (f_c)_2 = 6{,}1 \text{Hz} \qquad (f_c)_3 = 4 \text{Hz}$$

$$\xi_2 = 0{,}357 \qquad \xi_3 = 0{,}09$$

Exemple complet de synthèse

Tests

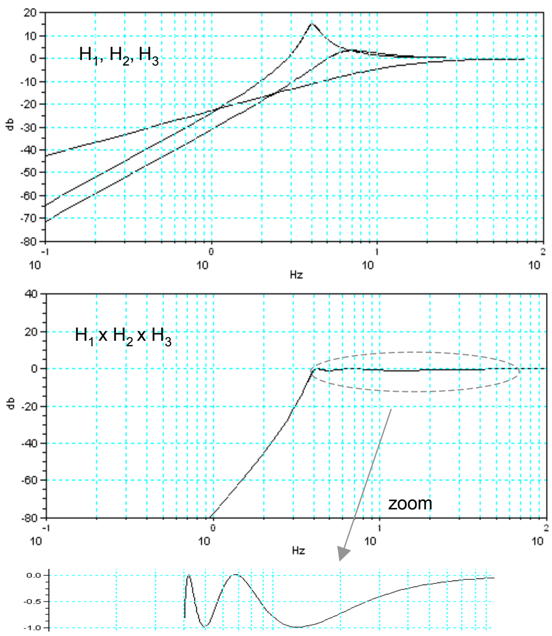
Avant de passer à la réalisation proprement dite, on peut simuler le filtre pour vérifier que la synthèse est correcte.

Programme Scilab :

```
fc=4;
w0=2*%pi*fc/0.29
num=poly([0 1/w0], "s", "coef");
den=poly([1 1/w0], "s", "coef");
sys1=syslin('c', num, den);
bode(sys1, 0.1, 100);

w0=2*%pi*fc/sqrt(0.429)
xi=0.468*w0/(4*%pi*fc)
num=poly([0 0 1/w0/w0], "s", "coef");
den=poly([1 2*xi/w0 1/w0/w0], "s", "coef");
sys2=syslin('c', num, den);
bode(sys2, 0.1, 100);

w0=2*%pi*fc/sqrt(0.988)
xi=0.179*w0/(4*%pi*fc)
num=poly([0 0 1/w0/w0], "s", "coef");
den=poly([1 2*xi/w0 1/w0/w0], "s", "coef");
sys3=syslin('c', num, den);
bode(sys3, 0.1, 100);
```



Affichage de la fonction de transfert produit :

```
...
bode(sys1*sys2*sys3, 1, 100);
...
```

Le gabarit désiré est bien obtenu.

Exemple complet de synthèse (5/6)

Exemple complet de synthèse

Réalisation électronique (1/2)

On se propose d'utiliser une cellule active du 1er ordre et de 2 filtres de Rauch pour les cellules du 2nd ordre.

Exemple complet de synthèse (6/6)

Exemple complet de synthèse

Réalisation électronique (2/2)