Traitement du Signal

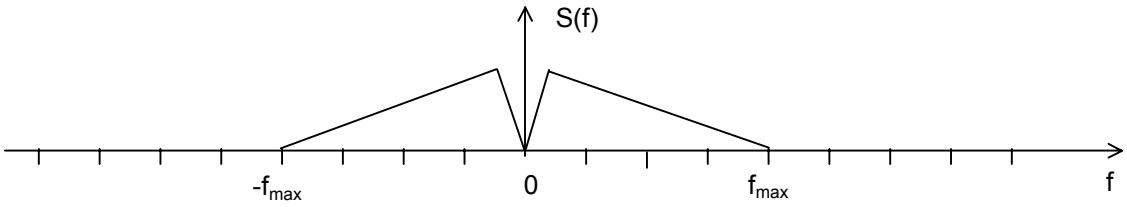
- Travaux Dirigés -

Sujet n°3 : "Echantillonnage, Transformée de Fourier d'un signal échantillonné"

Exercice 1 : Sur-échantillonnage

L'objectif de cet exercice est de mettre en évidence l'intérêt qu'il peut y avoir à sur-échantillonner un signal. Pour la compréhension de cet intérêt, il faut savoir qu'un filtre analogique d'un ordre donné est plus coûteux à réaliser en pratique que son équivalent numérique.

Soit un signal s(t) dont le spectre est le suivant :



On considère que l'information utile à l'application se situe dans la bande 0-f_u, avec $f_u=f_{max}/4$ (par exemple, la bande utile d'un signal audio se situe entre 20Hz et 20kHz environ, et en téléphonie on limite cette bande à 8kHz, soit un peu plus d'un tiers).

On souhaite échantillonner ce signal pour le transmettre à l'aide d'un système numérique.

1) Avant l'échantillonnage proprement dit, il faut d'abord filtrer le signal avec un filtre anti-repliement. Donner la fonction de transfert du filtre idéal permettant de réaliser cette opération.
2) Une fois filtré, le signal est échantillonné. On choisit une fréquence d'échantillonnage égale à la fréquence de Nyquist. Préciser cette fréquence et rappeler la condition de Shannon. Représenter le spectre du signal filtré puis celui du signal échantillonné, en fonction de la fréquence puis en de la fréquence réduite (ou normalisée).
3) Indiquer les difficultés de réaliser physiquement un tel système.
4) Pour faciliter la réalisation de ce système, on décide d'utiliser un filtre d'ordre moins important que le précédent. Montrer que cette contrainte impose de sur-échantillonner le signal.
5) On choisit un facteur de sur-échantillonnage égal à 2. Représenter le nouveau spectre du signal non-filtré.
6) Déterminer la bande de transition maximale du filtre anti-repliement à réaliser. Représenter sa réponse en fréquence, le nouveau spectre du signal filtré ainsi que celui du signal échantillonné. Préciser l'intérêt de ce filtre par rapport au précédent.
7) Une fois échantillonné, le signal discret doit être décimé du même facteur que le facteur d'échantillonnage pour atteindre le débit d'échantillons initialement souhaité. Représenter le spectre du signal décimé. Quel traitement préalable doit être appliqué au signal échantillonné pour éviter ce recouvrement ? Représenter la fonction de transfert de ce traitement.
8) Représenter la chaîne complète de conversion analogique-numérique réalisée sous forme de schéma-blocs.
9) Aurait-on pu se passer du filtre anti-repliement analogique ?

Exercice 2 : Transformée de Fourier (TF) d'un signal à temps discret et TF discrète (TFD)

On souhaite réaliser la transformée de Fourier d'un signal sur un ordinateur.
Ce signal est un signal sinusoïdal, de fréquence f=1Hz, défini par :

$$s(t) = \cos(\omega t)$$

1) Rappeler (sans démonstration) son spectre complexe (module, ou amplitude, et phase).

Troncature

2) Pour pouvoir étudier physiquement ce signal, on est obligé de le limiter dans le temps. On réalise ici une troncature simple, équivalent à une multiplication par un signal porte. On choisit une troncature sur une durée de 4 secondes.
   a) Donner l'expression du spectre du signal tronqué.
   b) Représenter (en utilisant directement les résultats de cours) le module d'amplitude de ce signal ainsi tronqué.

Echantillonnage

3) On choisit d'échantillonner ce signal à la fréquence f_e=4 Hz.
   a) Vérifier si cette fréquence est correcte (en justifiant la réponse).
   b) Donner les valeurs des N échantillons obtenus.
   c) Donner l'expression du signal non-tronqué échantillonné.
   d) Représenter son spectre sur un intervalle allant de $-f_e$ à $2f_e$.
   e) Donner l'expression de la TF (à temps discret) de ce signal (la démonstration n'est pas demandée).

TFD

On rappelle que la TFD consiste en un échantillonnage fréquentiel (dans le but de réaliser la TF à l'aide d'un système numérique, ordinateur ou autre), du spectre du signal lui-même échantillonné dans le temps.

Le nombre N d'échantillons (on parle de "points") du spectre est le même que le nombre d'échantillons du signal, entre 0 et f_e, soit pour un pas d'échantillonnage de f_e/N.

4) Donner les valeurs des points de la TFD du signal. Les comparer avec celles que l'on aurait obtenues avec un signal de durée infinie .
5) Même question que la précédente (mêmes paramètres de troncature et d'échantillonnage), mais avec un signal de fréquence 1,2Hz.