Traitement du Signal

- Travaux Dirigés -

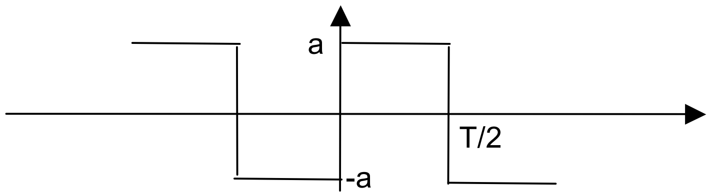
Sujet n°2 : "Série de Fourier, Transformée de Fourier"

Exercice 1 : Série de Fourier (*)

On considère un signal carré de période T défini par :

$$s(t) = \begin{cases} a & \text{pour} \quad t \in [kT, kT + T/2[\\ -a & \text{pour} \quad t \in [kT - T/2, kT[\end{cases}$$

k entier relatif.



1) Déterminer la décomposition de ce signal en série de Fourier réelle.
2) En déduire sa décomposition en série de Fourier complexe.
2) Tracer son spectre (module et phase).
2) En déduire (sans calcul) celle du signal carré défini par :

$$s(t) = \begin{cases} 2a & \text{pour} \quad t \in [kT, kT + T/2[\\ 0 & \text{pour} \quad t \in [kT - T/2, kT[\end{cases}$$

3) puis celle du signal défini par :

$$s(t) = \begin{cases} 2a & \text{pour} \quad t \in [kT - T/4, kT + T/4[\\ 0 & \text{pour} \quad t \in [kT + T/4, kT + 3T/4[\end{cases}$$

4) Déterminer sans calcul la décomposition en série de Fourier des signaux :

$$\sin(\omega t) \quad \text{et} \quad \cos(\omega t)$$

Exercice 2 : Etude fréquentielle d'un circuit RC (*)

On considère un circuit RC série, système linéaire et invariant (SLI), dont le fonctionnement est décrit par l'équation différentielle :

$$RC\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)$$

1) En utilisant la transformée de Fourier, déterminer sa fonction de transfert harmonique. Précisez le type de filtre qu'il constitue et sa fréquence de coupure.
2) On injecte en entrée de ce circuit un signal sinusoïdal d'amplitude 1V et de fréquence $1/2\pi RC$. Déterminer la forme du signal de sortie, son amplitude, son déphasage par rapport au signal d'entrée, et le gain en dB pour cette fréquence..
3) Déduire de la fonction de transfert harmonique du circuit sa réponse impulsionnelle (on pourra pour cela utiliser la transformée de Fourier de e^{-at}). Rappelez l'intérêt de connaître cette dernière.

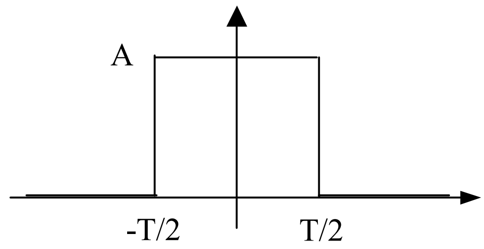
(*) facile ; (**) difficulté moyenne ; (***) difficile

Exercice 3 : Transformée de Fourier (TF) d'un signal porte (**)

1) Calculer la TF du signal porte défini par :

$$x(t) = A.rect_T(t)$$

et dont la représentation graphique est :



2) La représenter ainsi que son spectre.
3) En déduire sa densité spectrale de puissance.
4) En déduire sa puissance totale.
5) En déduire sa fonction d'autocorrélation. Retrouver la puissance à partir de cette dernière.
6) Déduire du 1) la TF de $\text{sinc}(t)$, et la représenter.

Exercice 4 : Observation d'un signal sur une durée finie (fenêtrage) (**)

1) A partir de la propriété de translation fréquentielle de la TF, et de la TF d'une impulsion de Dirac, déterminer la TF du signal exponentiel défini par :

$$s(t) = e^{j2\pi f_0 t}$$

2) En déduire la TF du signal sinusoïdal de fréquence f_0 défini par :

$$s(t) = \cos(2\pi f_0 t)$$

3) On observe maintenant ce signal sur une durée finie T (différente de la période du signal que l'on notera T_0). En considérant que cette observation correspond à la multiplication du signal par un signal porte, et en utilisant des propriétés de la TF et du produit de convolution, calculer sa TF.
4) Que faudrait-il faire pour que ce spectre se rapproche le plus possible de celui obtenu par la décomposition en série de Fourier ?
5) Interpréter ces résultats du point de vue du compromis de précision temps-fréquence.
6) Calculer la TF d'une fonction gaussienne centrée sur 0, la représenter et montrer qu'elle constitue une meilleure fonction de fenêtrage que la fonction porte.