Travaux Dirigés de

Traitement du Signal

Sujet n°1 : "Etude temporelle des signaux"

- corrigé partiel : exercices 5 et 6 -

Exercice 5 : Réponse d'un système linéaire et invariant à une entrée quelconque

On considère un circuit RC dont la réponse impulsionnelle est définie par :

$$h(t) = \frac{1}{RC}\exp(-\frac{t}{RC})$$

1) Représenter cette réponse. (*)
2) Déterminer sa réponse indicielle (réponse à un signal échelon de Heaviside) avec t≥0 (0 pour t<0) et la représenter. (*)
3) En déduire sa réponse à un signal porte défini par :

$$x(t) = rect_T(t - \frac{T}{2}) \qquad (**)$$

avec T>>RC.

4) Même chose pour un signal rampe définie par x(t)=t entre 0 et 1, x(t)=0 ailleurs. (**)

Rappels de cours

Dans le domaine temporel, la relation entrée-sortie d'un système linéaire et invariant (SLI) est un produit de convolution entre l'entrée et la réponse impulsionnelle :

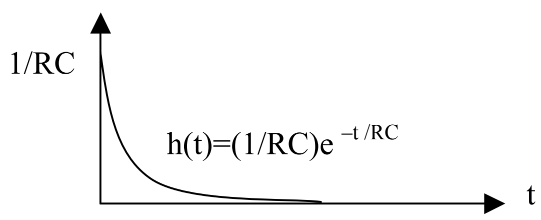
$$s(t) = e(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)e(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e(t-\tau)d\tau$$

Dans le cas d'un système causal et d'un signal d'entrée également causal, le domaine d'intégration se restreint à [0, t] :

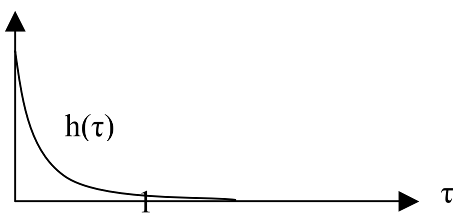
$$s(t) = \int_{0}^{t} h(t-\tau)e(\tau)d\tau = \int_{0}^{t} h(\tau)e(t-\tau)d\tau$$

Pour la borne inférieure (0), l'explication est simple : le signal d'entrée e(t) étant causal, il n'est pas défini pour t<0, ce qui provoque une intégration nulle sur]-∞, t].

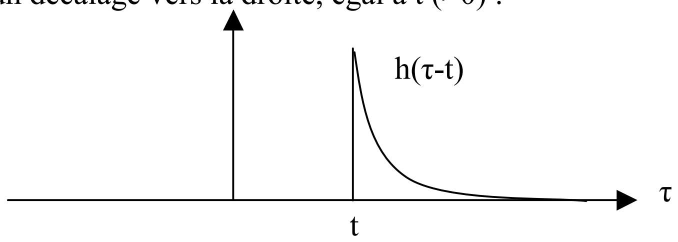
Pour la borne supérieure, il faut bien comprendre ce que représente physiquement l'opération de convolution sur les signaux. Prenons l'exemple d'un circuit RC série, dont la réponse impulsionnelle est :



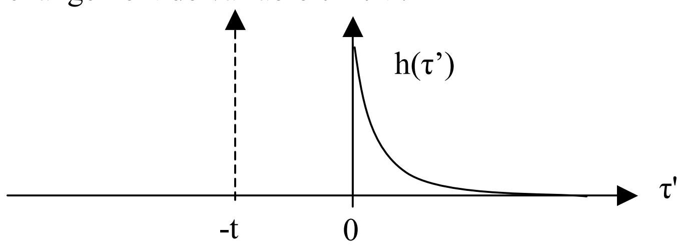
La variable d'intégration étant ici τ (différente de t, puisque la valeur de sortie à chaque instant t est le résultat d'une intégrale), il faut considérer h(τ) :



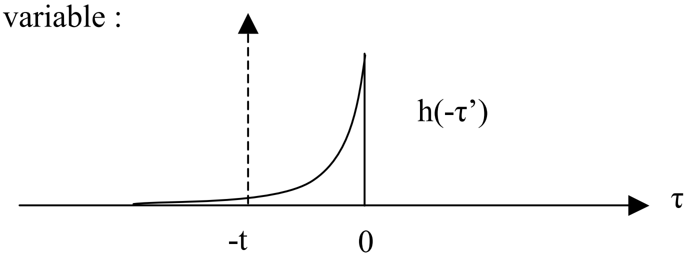
On considère un décalage vers la droite, égal à t (>0) :



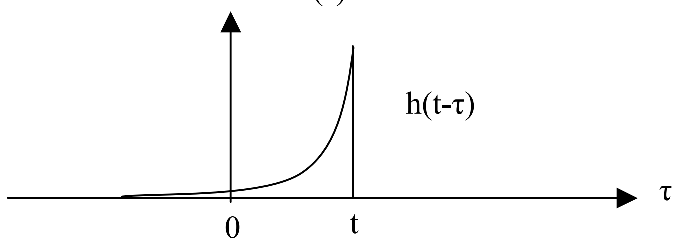
On effectue un changement de variable $\tau' = \tau - t$:



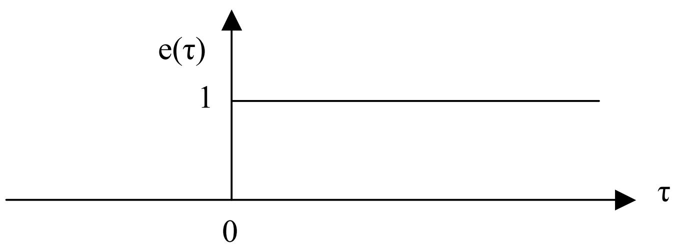
On inverse la variable :



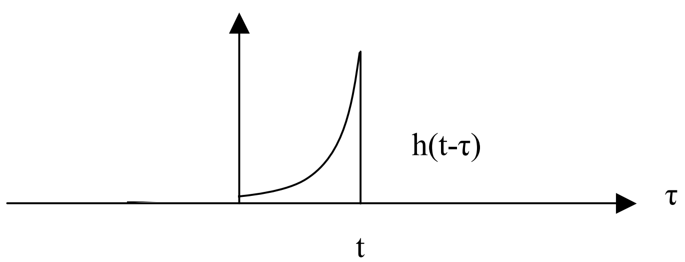
On fait ré-apparaître la variable initiale (τ) :



Cette fonction est alors multipliée par le signal d'entrée (on prend l'exemple d'un échelon unité) :

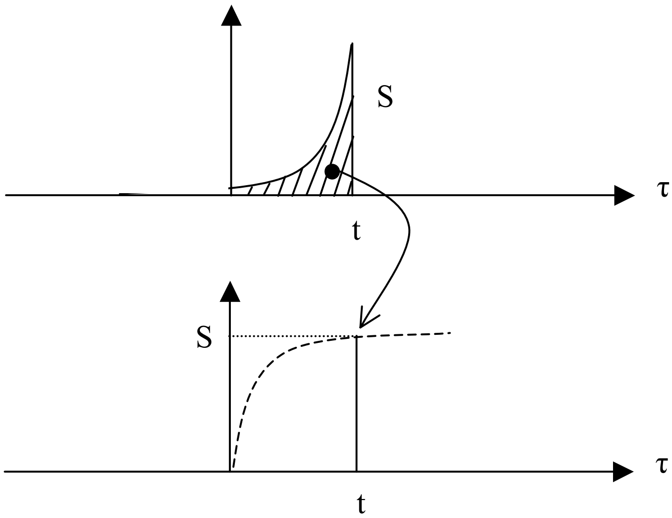


La multiplication donne :



C'est cette fonction qui est intégrée. On voit que du fait que la réponse impulsionnelle est causale, l'intégration sera nulle sur l'intervalle]t,+∞[. On peut donc limiter l'intervalle d'intégration entre 0 et t.

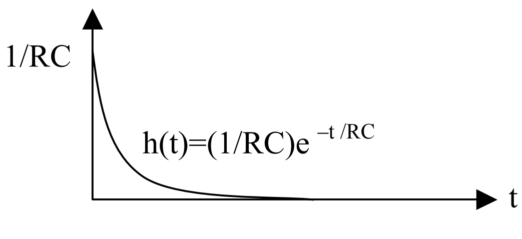
L'intégration consiste à mesurer la surface entre la courbe et l'axe des abscisses, ce qui donne un point (pour t) du signal de sortie :



En appliquant cette procédure pour toutes les valeurs de t>0, on obtient la réponse du système à un échelon, appelée réponse indicielle :

Solution

1)



2) Pour obtenir la réponse indicielle, on utilise le produit de convolution comme pour n'importe quel signal. Pour un signal d'entrée e(t), cette réponse est définie par :

$$s(t) = (e * h)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)e(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e(t-\tau)d\tau$$

où h(t) est la réponse impulsionnelle du système, définie par :

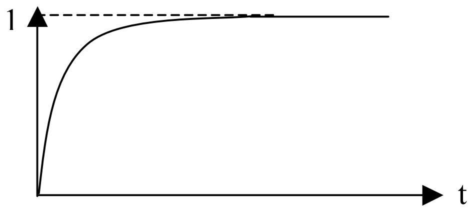
$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)e(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

Pour e(t)=u(t), on a :

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{RC}\int_0^t e^{-(t-\tau)/RC}d\tau \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{RC}\int_0^t e^{-t/RC} e^{\tau/RC} d\tau \\
&= \frac{e^{-t/RC}}{RC}\int_0^t e^{\tau/RC} d\tau \\
&= e^{-t/RC}\left[e^{\tau/RC}\right]_0^t \\
&= e^{-t/RC}\left[e^{t/RC}-1\right] \\
&= 1 - e^{-t/RC}
\end{aligned}
$$

La représentation graphique de cette fonction est la suivante :

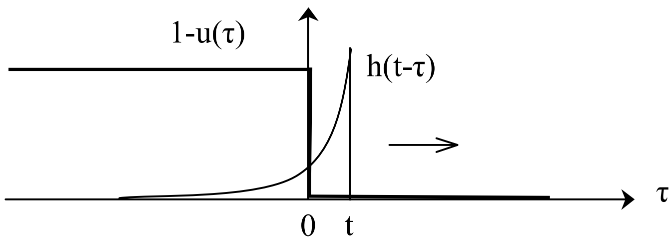


3) Il faut distinguer plusieurs cas :

- 1er cas : t<0 ; le produit entre h(t-τ) et e(τ) est nul, donc l'intégrale est nulle ainsi que le signal de sortie (comme précédemment).
- 2e cas : 0<t<T ; on retombe dans le cas où le signal d'entrée est l'échelon de Heaviside (voir ci-dessus), donc :

$$y(t) = 1 - e^{-t/RC}$$

- 3e cas : t>T ; il est alors plus simple d'effectuer un décalage temporel avant le calcul : t'=t-T. Pour simplifier, on peut considérer que la valeur du signal à T est égale à 1. Le signal d'entrée est donc égal à 1-u(t) :



Le cas qui nous intéresse ici est alors τ >0. Le produit des 2 fonctions 1-u(t) et h(t- τ) étant nul sur cet intervalle, il ne faut plus considérer les signaux comme causals (en effet, si on le faisait le produit de convolution serait nul sur cet intervalle). L'intervalle d'intégration, initialement]-∞,+∞[., se limite à]-∞,0[. On a donc :

$$
\begin{aligned}
s(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} (1-u(\tau))h(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{0} (1-u(\tau))h(t-\tau)d\tau \\
&= \frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{0} e^{-(t-\tau)/RC} d\tau \\
&= e^{-t/RC}\left[e^{\tau/RC}\right]_{-\infty}^{0} \\
&= e^{-t/RC}\left[e^{0}-e^{-\infty}\right]
\end{aligned}
$$

$$= e^{-t/RC}$$

On obtient une exponentielle décroissante, correspondant physiquement à la décharge du condensateur dans la résistance.

Remarque : si le signal à T=0 n'avait pas été égal à 1 mais à K (K<1), cela aurait équivalent à avoir un signal d'entrée égal à K(1-u(t)), et le résultat aurait été :

$$y(t) = Ke^{-t/RC}$$

4)
-1er cas : identique au cas du signal porte.
-2e cas :

$$y(t) = \int_0^t r(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^t \tau.h(t-\tau)d\tau$$

$$y(t) = \int_0^t \tau.h(t-\tau)d\tau = \frac{1}{RC}\int_0^t \tau.e^{-(t-\tau)/RC}d\tau = \frac{1}{RC}e^{-t/RC}\int_0^t \tau.e^{\tau/RC}d\tau$$

On doit utiliser l'intégration par parties :

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \leftrightarrow \qquad uv = \int u'v + \int uv' \qquad \leftrightarrow \qquad \int u'v = uv - \int uv'$$

En prenant $u'=e^{\tau/RC}$ et $v=\tau$, on a : $u=RCe^{\tau/RC}$ et $v'=1$. Donc :

$$y(t) = \frac{1}{RC}e^{-t/RC}\left\{RC\left[\tau e^{\tau/RC}\right]_0^t - RC\int_0^t e^{\tau/RC}d\tau\right\} = e^{-t/RC}\left\{\left[\tau e^{\tau/RC}\right]_0^t - \int_0^t e^{\tau/RC}d\tau\right\}$$

$$= e^{-t/RC}\left\{\left[\tau e^{\tau/RC}\right]_0^t - RC\left[e^{\tau/RC}\right]_0^t\right\} = e^{-t/RC}\left\{\left[te^{t/RC}\right] - RC\left[e^{t/RC} - 1\right]\right\}$$

$$= t - RC(1 - e^{-t/RC})$$

3e cas : identique à celui de la porte.

Exercice 6 : Convolution avec réponse impulsionnelle (***)

1) Le calcul de la moyenne mobile (ou glissante) d'un signal sur une durée T consiste à calculer, à chaque instant t, l'intégrale d'un signal de t-T à T. Montrer que ce calcul est une convolution avec la fonction rectangulaire centrée sur T/2, définie par :

$$h(t) = \frac{1}{T}\mathrm{rect}_T(t - \frac{T}{2})$$

2) Estimer sans calcul le résultat de la convolution de ce signal avec le signal défini par :

$$e(t) = \mathrm{rect}_{2T}(t - T)$$

puis le démontrer par le calcul.

Solution

1) La moyenne mobile est obtenue par :

$$s(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} e(\tau)d\tau$$

Cette expression est équivalente à une intégration sur l'intervalle]-∞,+∞[, du signal e(τ) multiplié avec une fonction porte. Il faut donc d'abord exprimer correctement cette dernière.

Une fonction porte de largeur T et centrée sur 0 est définie par (en fonction de la variable d'intégration τ) :

$$\mathrm{rect}_T(\tau)$$

La même fonction centrée sur t>0 est définie par :

$$\mathrm{rect}_T(\tau - t)$$

Décalée de T vers la gauche, son expression devient :

$$\mathrm{rect}_T(\tau - t + \frac{T}{2})$$

L'intégrale peut donc s'écrire :

$$s(t) = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}_T(\tau - t + \frac{T}{2}) e(\tau) d\tau$$

Il reste à montrer que celle fonction porte est une réponse impulsionnelle. Pour cela on cherche à identifier cette intégrale avec celle du produit de convolution :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau) e(\tau) d\tau$$

Par identification :

$$\frac{1}{T}\mathrm{rect}_T(\tau - t + T/2) = h(t - \tau)$$

soit, avec le changement de variable t'=t-τ :

$$h(t') = \frac{1}{T}\mathrm{rect}_T(-t' + T/2)$$

Avec un 2^e changement de variable : t''=t'-T/2 ;

$$h(t'') = \frac{1}{T}\mathrm{rect}_T(-t'') = \frac{1}{T}\mathrm{rect}_T(t'')$$

car la fonction est paire.

Si l'on effectue le changement de variable inverse (t'=t''+T/2) pour revenir à t' :

$$h(t') = \frac{1}{T}\mathrm{rect}_T(t' - T/2)$$

que l'on peut noter également :

$$h(t) = \frac{1}{T}\mathrm{rect}_T(t - T/2)$$

on obtient bien une fonction causale puisque de largeur T et décalée vers la droite de T/2 (donc nulle pour t<0).

2) Il s'agit d'une fonction porte de hauteur 1, centrée sur T et de largeur 2T. Puisque la convolution avec la fonction h(t) précédente constitue un calcul de moyenne mobile, on peut déduire la forme du signal de sortie sans le calculer :
- de -∞ à 0 ; le produit entre h(t-τ) et e(τ) est nul, donc l'intégrale est nulle ainsi que le signal de sortie ;
- de 0 à T ; la moyenne du signal d'entrée donne une droite de pente 1, donc s(T)=1 ;
- de T à 2T ; la moyenne du signal d'entrée est constante, égale à 1 ;
- de 2T à 3T ; la moyenne du signal d'entrée est une droite de pente –1, donc s(3T)=0 ;
- de 3T à +∞ ; la moyenne du signal d'entrée est nulle.