Traitement du Signal

- Travaux Dirigés -

Sujet n°2 : "Etude fréquentielle des signaux : analyse de Fourier"

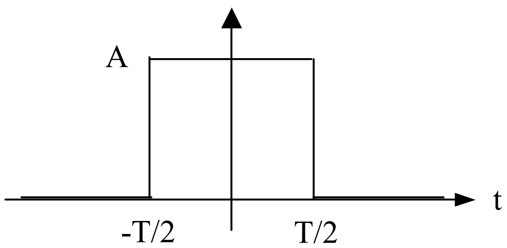
- corrigé partiel : exercices 3 et 4 -

Exercice 3 : Transformée de Fourier (TF) d'un signal porte (**)

1) Calculer la TF du signal porte défini par :

$$x(t) = A.\mathrm{rect}_T(t)$$

et dont la représentation graphique est :



2) La représenter ainsi que son spectre (d'amplitude).
3) En déduire sa densité spectrale d'énergie.
4) En déduire son énergie totale.
5) En déduire sa fonction d'autocorrélation. Retrouver l'énergie à partir de cette dernière.
6) Déduire du 1) la TF de $\sin c(t)$, et la représenter.

Commentaire

Il est important de savoir calculer la TF de la fonction porte, car du point de vue de l'intégration on ne peut trouver plus simple : elle est constante sur l'intervalle d'intégration.

De plus, la fonction porte se rencontre souvent : par exemple pour le fenêtrage d'un signal à support non-borné (= de durée infinie), ou pour la modélisation de la réponse en fréquence d'un filtre passe-bas idéal.

Solution

1) Le calcul de sa transformée de Fourier donne :

$$X(f) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = A\int_{t=-T/2}^{+T/2} e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= -\frac{A}{j2\pi f}\left[e^{-j2\pi ft}\right]_{-T/2}^{+T/2} = -\frac{A}{j2\pi f}\left[e^{-j\pi fT} - e^{j\pi fT}\right] = \frac{A}{j2\pi f}\left[e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}\right] = \frac{A}{\pi f}\sin \pi fT = AT\sin c(\pi Tf)$$

En effet, il faut se rappeler que :

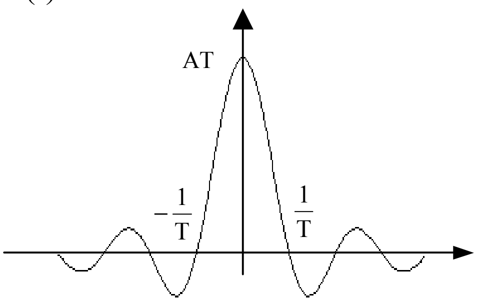
$$\sin c(x) = \frac{\sin x}{x}$$

sinc(x) s'annule pour $x=k\pi$, donc X(f) pour Tf=k, soit f=k/T.
sinc(0)=1 donc X(0)=AT.
sinc(x) est max pour $x=\pi/2+k\pi$, donc X(f) est max pour f=1/2T+kT.

Remarque : pour démontrer sinc(0)=1, il faut passer par le développement de sin(x) :

$$\lim_{x\to 0} \sin c(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x-\varepsilon(x)}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

Représentation graphique de X(f) :



2) La fonction X(f) étant réelle, le spectre d'amplitude est la valeur absolue de la transformée de Fourier :

$$|X(f)| = AT|\sin c(\pi Tf)|$$

3) La densité spectrale d'énergie (DSE) est égale au carré du spectre :

$$\Gamma(f) = |X(f)|^2 = (AT)^2 \sin c^2(\pi Tf)$$

4) L'énergie totale du signal est définie dans le domaine temporel par :

$$E = \int_{t=-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Mais d'après le théorème de Parseval, on peut calculer cette énergie à partir du spectre fréquentiel du signal :

$$E = \int_{t=-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{f=-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

Soit :

$$E = \int_{f=-\infty}^{+\infty} (AT)^2 \sin c^2(\pi Tf) df = A^2T \int_{f=-\infty}^{+\infty} T \sin c^2(\pi Tf) df = A^2T$$

par utilisation de la propriété

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin c^2(\tau) d\tau = 1$$

5) *Remarque* : pour répondre à cette question, la TF d'une fonction triangulaire doit être connue (ou donnée en énoncé).

La DSE Γ(f) est la Transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation γ(τ). Connaissant Γ(f), on peut alors calculer γ(τ) par TF inverse :

$$\gamma(\tau) = TF^{-1}[\Gamma(f)] = TF^{-1}[(AT)^2 \sin c^2(\pi Tf)]$$

D'après la table des transformées :

$$TF^{-1}[T \sin^2 c(\pi Tf)] = tri\left(\frac{t}{T}\right)$$

d'où, par linéarité :

$$TF^{-1}\left[(AT)^2 |\sin c(\pi Tf)|^2\right] = A^2T.tri\left(\frac{t}{T}\right)$$

Finalement :

$$\gamma(\tau) = A^2T.tri\left(\frac{\tau}{T}\right)$$

L'énergie du signal est la valeur de la fonction d'autocorrélation pour τ=0 :

$$E = \Gamma(0) = A^2T$$

6) *Remarque* : pour répondre à cette question, la propriété de dualité doit être connue (ou donnée en énoncé).

On a :

$$x(t) = A.\mathrm{rect}_T(t) \quad \xleftrightarrow{F} \quad X(f) = AT\sin c(\pi Tf) \qquad (1)$$

Par dualité :

$$x(t) = AT\sin c(\pi Tt) \quad \xleftrightarrow{F} \quad X(f) = A.\mathrm{rect}_T(-f) = A.\mathrm{rect}_T(f) \qquad (2)$$

car la fonction porte est paire.
A partir de (2), par linéarité, on a :

$$x(t) = \sin c(\pi Tt) \quad \xleftrightarrow{F} \quad X(f) = \frac{1}{T}\mathrm{rect}_T(f)$$

et par la propriété d'homothétie :

$$x(t) = \sin c(\pi t) \quad \xleftrightarrow{F} \quad X(f) = \mathrm{rect}_1(f)$$

Enfin, pour la même raison :

$$x(t) = \sin c(t) \quad \xleftrightarrow{F} \quad X(f) = \pi\mathrm{rect}_1(f)$$

Cette fonction est une fonction porte d'amplitude π et de largeur 1, centrée sur f=0.

Exercice 4 : Observation d'un signal sur une durée finie (fenêtrage) (**)

1) A partir de la propriété de translation fréquentielle de la TF, et de la TF d'une impulsion de Dirac, déterminer la TF du signal exponentiel défini par :

$$s(t) = e^{j2\pi f_0 t}$$

2) En déduire la TF du signal sinusoïdal de fréquence f_0 défini par :

$$s(t) = \cos(2\pi f_0 t)$$

3) On observe maintenant ce signal sur une durée finie T (différente de la période du signal que l'on notera T_0). En considérant que cette observation correspond à la multiplication du signal par un signal porte, et en utilisant des propriétés de la TF et du produit de convolution, calculer sa TF.
4) Que faudrait-il faire pour que ce spectre se rapproche le plus possible de celui obtenu par la décomposition en série de Fourier ?
5) Interpréter ces résultats du point de vue du compromis de précision temps-fréquence.
6) Calculer la TF d'une fonction gaussienne centrée sur 0, la représenter et montrer qu'elle constitue une meilleure fonction de fenêtrage que la fonction porte.

Commentaire

L'intérêt de cet exercice est très important : en pratique, la TF est discrète, et s'effectue toujours sur un nombre d'échantillons fini. Cela revient à appliquer un fenêtrage au signal analysé. Il faut avoir bien compris l'influence de ce fenêtrage pour pouvoir interpréter correctement les résultats d'une TFD (par exemple, réalisée avec la fonction FFT, pour Fast Fourier Transform, de Matlab).

Solution

1) Par utilisation des 2 propriétés :

$$F\left[x(t).e^{j2\pi f_0 t}\right] = X(f - f_0)$$

$$F[1] = \delta(f)$$

on déduit que :

$$F\left[e^{j2\pi f_0 t}\right] = \delta(f - f_0)$$

2) Par utilisation de la formule d'Euler, on peut écrire le signal sous la forme :

$$s(t) = \cos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}$$

Par linéarité, on a :

$$S(f) = F(\cos(2\pi f_0 t)) = \frac{1}{2}\left(F(e^{j2\pi f_0 t}) + F(e^{-j2\pi f_0 t})\right) = \frac{1}{2}\left(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right)$$

3) Ce signal fenêtré par un signal porte peut être formalisé par :

$$s_T(t) = s(t) \times rect_T(t)$$

Sa transformée est égale à :

$$S_T(f) = S(f) * F(rect_T(t)) = S(f) * T \sin c(\pi f T)$$

On sait que S(f) est composé de 2 raies spectrales :

$$S(f) = \frac{1}{2}\left[\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)\right]$$

D'où, d'après la propriété de distributivité du produit de convolution :

$$S_T(f) = \frac{1}{2}\left[\delta(f + f_0) * T \sin c(\pi f T) + \delta(f - f_0) * T \sin c(\pi f T)\right]$$

Or, il faut se souvenir que l'on a la propriété (de translation) suivante :

$$f(x) * \delta(x - x_0) = f(x - x_0)$$

D'où :

$$S_T(f) = \frac{T}{2}\left[\sin c(\pi(f + f_0)T) + \sin c(\pi(f - f_0)T)\right]$$

Donc le spectre de fréquence est composé de 2 sinus cardinaux, situés en $-f_0$ et $+f_0$, d'amplitudes T/2 et de période 1/T.

4) Pour se rapprocher du résultat de la décomposition en série de Fourier, il faudrait que la durée d'observation tende vers l'infini : la période du sinus cardinal tendrait alors vers 0, et l'amplitude du lobe principal tendrait vers l'infini, ce qui correspond à la définition d'une impulsion de Dirac.

5) Quand on diminue la durée d'analyse d'un signal, on augmente la précision de localisation dans le temps (supposons que le signal soit porteur d'informations, ce qui n'est pas le cas d'un sinus, ces informations seront localisées dans le temps, comme par exemple dans le cas de la parole) mais on diminue la précision de localisation en fréquence. Et inversement.