Conservatoire National des Arts et Métiers - Rouen
"Signal déterministe"
- Examen final -
- Corrigé avec barème indicatif -

Date : 30 juin 2006
Durée : 2 heures
Enseignant : Benoît DECOUX
Documents/outils autorisés : calculatrice

1) Transformée de Fourier (10 points)

1.1) Calculer la transformée de Fourier d'un signal carré défini par

$$x(t) = A.\mathrm{rect}\left[\frac{t}{T}\right]$$

et la représenter. (1,5 pt)

1.2) En déduire l'expression de son spectre de fréquence ainsi que celle de sa densité spectrale de puissance. (1 pt)

1.3) En déduire sa puissance totale. (1,5 pt)

1.4) En déduire sa fonction d'autocorrélation. Retrouver la puissance à partir de cette dernière. (1 pt)

1.5) On rappelle la propriété suivante :

$$\delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft}dt$$

Calculer la transformée de Fourier d'un signal sinusoïdal défini par :

$$x(t) = \sin(\omega t)$$

(1 pt)

1.6) On observe ce signal sur une durée finie T (différente de la période du signal que l'on notera T_0). Calculer à nouveau sa transformée de Fourier. (1,5 pt)

1.7) Que faudrait-il faire pour que ce spectre se rapproche le plus possible de celui obtenu par la décomposition en série de Fourier ? (0,5 pt)

1.8) On rappelle la définition de la transformée de Fourier discrète (TFD) :

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} w_N^{kn}x(n) \quad ; k=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$$

avec

$$W_N^{nk} = \exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right)$$

On considère un signal sinusoïdal défini sur 4 points par :

{0, 1, 0, -1}

Calculer la séquence complexe obtenue par TFD de cette séquence. (1,5 pt)

1.9) Interpréter ces résultats et les comparer avec ceux obtenus par le calcul mathématique. (0,5 pt)

1.1)

$$X(f) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt = A\int_{t=-T/2}^{+T/2} e^{-j2\pi ft}dt$$

$$= -\frac{A}{j2\pi f}\left[e^{-j2\pi ft}\right]_{-T/2}^{+T/2} = -\frac{A}{j2\pi f}\left[e^{-j\pi fT} - e^{j\pi fT}\right] = \frac{A}{j2\pi f}\left[e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}\right] = \frac{A}{\pi f}\sin\pi fT = AT\sin c(Tf)$$

1.2)

Son spectre de fréquence est défini par

$$|X(f)| = AT|\sin c(Tf)|$$

Sa densité spectrale de puissance est définie par :

$$S(f) = |X(f)|^2 = (AT)^2 |\sin c(Tf)|^2 = (AT)^2 \sin c^2(Tf)$$

1.3)

La puissance totale du signal est définie dans le domaine temporel par :

$$P = \int_{t=-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Mais d'après le théorème de Perseval, on peut calculer cette puissance à partir du spectre fréquentiel du signal :

$$P = \int_{t=-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{f=-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

Soit :

$$P = \int_{f=-\infty}^{+\infty} (AT)^2 \sin c^2(Tf) df = A^2 T \int_{f=-\infty}^{+\infty} T \sin c^2(Tf) df = A^2 T$$

1.4)

La densité spectrale de puissance (DSP) est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation. Donc pour connaître cette dernière il suffit d'effectuer la transformée inverse de la DSP déterminée précédemment. D'après la table des transformées :

$$F\left[T \sin^2 c(Tf)\right] = \text{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$$

d'où

$$F^{-1}\left[(AT)^2 |\sin c(Tf)|^2\right] = A^2 T.\text{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$$

Finalement :

$$C(\tau) = A^2 T.\text{tri}\left(\frac{\tau}{T}\right)$$

La puissance du signal est la valeur de la fonction d'autocorrélation pour $\tau=0$:

$$P = C(0) = A^2 T$$

1.5)

Par utilisation de la formule d'Euler, on peut écrire le signal sous la forme :

$$s(t) = \cos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}$$

Par linéarité, et en utilisant la propriété :

$$F\left[e^{j2\pi f_0 t}\right] = \delta(f - f_0)$$

on a :

$$S(f) = F(\cos(2\pi f_0 t)) = \frac{1}{2}\left(F(e^{j2\pi f_0 t}) + F(e^{j2\pi f_0 t})\right) = \frac{1}{2}\left(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right)$$

$$S(f) = \frac{1}{2}\left[\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)\right]$$

1.6)

Ce signal fenêtré par un signal porte peut être formalisé par :

$$s_T(t) = s(t) \times \text{rect}_T(t) = s(t) \times \text{rect}(t / T)$$

Sa transformée est égale à :

$$S_T(f) = S(f) * F(rect_T(t)) = S(f) * T \sin c(fT)$$

On sait que S(f) est composé de 2 raies spectrales :

$$S(f) = \frac{1}{2}[\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)]$$

D'où, d'après la propriété de linéarité du produit de convolution :

$$S_T(f) = \frac{1}{2}[\delta(f + f_0) * T \sin c(fT) + \delta(f - f_0) * T \sin c(fT)]$$

Or, il faut se souvenir que l'impulsion de Dirac est l'élément neutre du produit de convolution :

$$f(x) * \delta(x) = f(x)$$

De même, on a (propriété de translation) :

$$f(x) * \delta(x - x_0) = f(x - x_0)$$

Donc, finalement, le spectre de fréquence est composé de 2 sinus cardinaux, situés en $-f_0$ et $+f_0$, d'amplitude T/2 et de période 1/T.

1.7)

Pour se rapprocher du résultat de la décomposition en série de Fourier, il faudrait que la durée d'observation tende vers l'infini : la période du sinus cardinal tendrait alors vers 0, et l'amplitude du lobe principal tendrait vers l'infini, ce qui correspond à la définition d'une impulsion de Dirac.

1.8)

Les facteurs de phase sont égaux à :

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

Le calcul de la séquence de sortie donne :

{X(1), X(2), X(3), X(4)}={0, -0,5j, 0, 0,5j}

1.9)

On retrouve les résultat du calcul (2.5), à savoir que la transformée est imaginaire pure, impaire. Les indices des points sont compris dans l'intervalle

$$\left[-\frac{N}{2}; \frac{N}{2} - 1\right] = [-2;1]$$

donc les 2 raies ont pour indice –1 et 1. Leur valeur absolue correspond au nombre de période de signal dans les N points. Ici, il y a une seule période.

2) Filtrage analogique (4 points)

On considère le système défini par la transmittance :

$$T(p) = \frac{1}{p + 0,01}$$

2.1) Déterminer la réponse impulsionnelle de ce système. (0,5 pt)

2.2) Ce système est-il stable ou instable ? Justifier la réponse en raisonnant sur sa réponse impulsionnelle ainsi que sur son pôle. (1 pt)

2.3) Donner l'allure de son diagramme de gain en fonction de la fréquence : type du filtrage réalisé, fréquence(s) de coupure, pente des variations. (1 pt)

2.4) Même question dans le cas de la mise en série de 2 filtres identiques. (0,5 pt)

2.5) Pour améliorer les caractéristiques du filtrage, on choisit d'utiliser un filtre de Butterworth défini par :

$$|T(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}$$

Comparer la pente du diagramme de gain de ce filtre lorsque $f \to \infty$, ainsi que sa valeur à la fréquence de coupure, et les comparer avec celles du filtre de la question 2.4), avec N=2. (1 pt)

2.1)

$$h(t) = e^{-0,01t}$$

2.2)
On a

$$\int_0^{\infty} h(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-0,01t}dt = -\frac{1}{0,01}\left[e^{-0,01t}\right]_0^{\infty} = -\frac{1}{0,01}[0-1] = 100 < \infty$$

donc le système est stable. De plus, il possède un pôle unique p=-0,01. Ce pôle est à partie réelle négative donc le système est stable.

2.3)
On détermine sa fonction de transfert harmonique en remplaçant p par $j\omega$, et on cherche à la mettre sous la forme :

$$T(j\omega) = \frac{A}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

où ω_c est la pulsation de coupure et A une constante. On a :

$$T(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 0,01} = \frac{100}{j\frac{\omega}{0,01}+1}$$

d'où A=100 et ω_c=0,01 rad/s. Cette fonction de transfert est celle d'un filtre passe-bas de fréquence de coupure $f_c = \omega_c/2\pi = 0,01/2\pi = 0,016$Hz. Ce filtre est d'ordre 1 et la pente de la décroissance de son gain ($20\log|S(j\omega)/E(j\omega)|$) est –20dB/décade.

2.4)
La fréquence de coupure reste la même, la pente est doublée et la valeur du gain à la fréquence de coupure devient –6dB.

2.5)
On peut montrer que la valeur du gain à la fréquence de coupure est –3dB (et ceci quel que soit l'ordre N). En prenant N=2, on peut démontrer que la pente de la décroissance est égale à 40. Dans le cas général, elle est égale à N×20 dB/décade. L'avantage par rapport au filtre précédent est donc le gain moins affaibli à la fréquence de coupure.

3) Filtrage numérique (6 points)

Pour pouvoir programmer le système précédent, de transmittance

$$T(p) = \frac{1}{p+0,01}$$

on échantillonne sa réponse impulsionnelle avec une fréquence d'échantillonnage T_e=100Hz.
3.1) Donner les 4 premiers éléments de cette réponse (on limitera la précision à 4 décimales). (1 pt)
3.2) Déterminer sa transmittance en z. (1,5 pt)
3.3) A partir de cette fonction de transfert, retrouver la réponse impulsionnelle par la formule des résidus. (2 pt)
3.4) Déterminer l'équation aux différences correspondante du système. L'appliquer à la séquence suivante {1,0,0,0}, et comparer les résultats avec les résultats précédents. (1 pt)
3.5) Ce filtre est-il de type RIF ou RII ? Justifier la réponse. (0,5 pt)

3.1)
On reprend la réponse impulsionnelle déterminée dans l'exercice 2. Une fois échantillonnée elle est définie par :

$$h(n) = e^{-nT_e}$$

Ses 4 premiers éléments sont :

$$h(0) = 1 \;;\; h(1) = e^{-0,01T_e} = e^{-1} = 0,3679 \;;\; h(2) = e^{-2} = 0,1353 \;;\; h(3) = e^{-3} = 0,0498$$

3.2)
La transmittance en z est la transformée en z de la réponse impulsionnelle :

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n).z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-0,01nT_e}.z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-0,01T_e}.z^{-1})^n$$

Cette somme est une progression géométrique. On peut la mettre sous la forme :

$$H(z) = \frac{1}{1-e^{-0,01T_e}z^{-1}} = \frac{1}{1-0,3679z^{-1}} = \frac{z}{z-0,3679}$$

3.3)
La réponse impulsionnelle est la transformée en z inverse de la fonction de transfert. L'intégration par la méthode des résidus de la fonction de transfert donne donc la réponse impulsionnelle.

$$h(n) = \sum \text{ résidus de } H(z)z^{n-1}$$

Le résidu du pôle z_i est défini par :

$$Res_{z_i} = \lim_{z \to z_i}(H(z)z^{n-1}(z-z_i))$$

La relation entre le pôle z_i est lié au pôle de la transmittance de Laplace p_i est :

$$z_i = e^{p_i T_e}$$

Ici la transmittance de Laplace ne possède qu'un seul pôle : p_1=-0,01. Il correspond à un pôle de la transmittance en z :

$$z_1 = e^{p_1 T_e} = e^{-1} = 0,3679$$

C'est un pôle simple donc il n'y a qu'un seul résidu :

$$h(n) = Res_{z_1=0,3679} = \lim_{z \to z_1=0,3679}(H(z)z^{n-1}(z-0,3679))$$

$$= \lim_{z \to z_1=0,3679}(\frac{z}{z-0,3679}z^{n-1}(z-0,3679)) = \lim_{z \to z_1=0,3679} z^n = 0,3679^n$$

Ses 4 premiers éléments sont :

$$h(0) = 1 \;;\; h(1) = 0,3679^1 = 0,3679 \;;\; h(2) = 0,3679^2 = 0,1353 \;;\; h(3) = 0,3679^3 = 0,0498$$

On retrouve bien les résultats obtenus par l'échantillonnage de la réponse impulsionnelle.

3.4)

$$H(z)=\frac{1}{1-0{,}3679z^{-1}}=\frac{S(z)}{E(z)}$$

$$S(z).(1-0{,}3679z^{-1})=E(z)$$

$$s(n)-0{,}3679s(n-1)=e(n)$$

$$s(n)=e(n)+0{,}3679s(n-1)$$

Les 4 premiers éléments de cette séquence sont :

$$s(0)=e(0)+0{,}3679s(-1)=e(0)=1$$

$$s(1)=e(1)+0{,}3679s(0)=0{,}3679$$

$$s(2)=e(2)+0{,}3679s(1)=0{,}3679^{2}=0{,}1353$$

$$s(3)=e(3)+0{,}3679s(2)=0{,}3679^{3}=0{,}0498$$

On retrouve bien la réponse impulsionnelle, ce qui est normal puisque le signal d'entrée est l'impulsion de Kronecker.

3.5)

Le filtre est de type RII : même s'il est stable, l'équation aux différences comporte un terme de récurence.

Annexe

1) Extrait de la table des transformées de Fourier usuelles

s(t)	**S(f)=F[s(t)]**
$\delta(t)$	1
1	$\delta(f)$
$s(t)=\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}\left[\delta(f+f_0)+\delta(f-f_0)\right]$
$s(t)=\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{j}{2}\left[\delta(f+f_0)-\delta(f-f_0)\right]$
$\Pi(\frac{t}{T})=\mathrm{rect}\left[\frac{t}{T}\right]$	$T\sin c(Tf)$
$\mathrm{tri}\left[\frac{t}{T}\right]$	$T\sin c^2(Tf)$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_0)$	$\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(f-\frac{n}{T_0})$

2) Divers

Sinus cardinal

Définition

$$\sin c(t)=\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

Propriété

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin c(\tau)d\tau=1 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty}\sin c^2(\tau)d\tau=1$$

Suite numérique

Une suite (u_n) est géométrique ssi il existe un réel r tel que pour tout n :

$$u_{n+1} = r\, u_n$$

La somme S_n des n premiers termes de la suite ($S_n=u_0+u_1+...+u_n$) est égale à, si $r\neq 1$:

$$S_n = u_0\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$