Conservatoire National des Arts et Métiers - Rouen
"Signal déterministe"
- Examen final -

Date : 30 juin 2006
Durée : 2 heures
Enseignant : Benoît DECOUX
Documents/outils autorisés : calculatrice

1) Transformée de Fourier

1.1) Calculer la transformée de Fourier d'un signal carré défini par

$$x(t) = A.\text{rect}\left[\frac{t}{T}\right]$$

et la représenter.

1.2) En déduire l'expression de son spectre de fréquence ainsi que celle de sa densité spectrale de puissance.

1.3) En déduire sa puissance totale.

1.4) En déduire sa fonction d'autocorrélation. Retrouver la puissance à partir de cette dernière.

1.5) On rappelle la propriété suivante :

$$\delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft} dt$$

Calculer la transformée de Fourier d'un signal sinusoïdal défini par :

$$x(t) = \sin(\omega t)$$

1.6) On observe ce signal sur une durée finie T (différente de la période du signal que l'on notera T_0). Calculer à nouveau sa transformée de Fourier.

1.7) Que faudrait-il faire pour que ce spectre se rapproche le plus possible de celui obtenu par la décomposition en série de Fourier ?

1.8) On rappelle la définition de la transformée de Fourier discrète (TFD) :

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} w_N^{kn} x(n) \quad ; k=0, 1, \ldots, N-1$$

avec

$$W_N^{nk} = \exp\left(-j\frac{2\pi nk}{N}\right)$$

On considère un signal sinusoïdal défini sur 4 points par :

{0, 1, 0, -1}

Calculer la séquence complexe obtenue par TFD de cette séquence.

1.9) Interpréter ces résultats et les comparer avec ceux obtenus par le calcul mathématique.

2) Filtrage analogique (4 points)

On considère le système défini par la transmittance :

$$T(p) = \frac{1}{p + 0{,}01}$$

2.1) Déterminer la réponse impulsionnelle de ce système.

2.2) Ce système est-il stable ou instable ? Justifier la réponse en raisonnant sur sa réponse impulsionnelle ainsi que sur son pôle.

2.3) Donner l'allure de son diagramme de gain en fonction de la fréquence : type du filtrage réalisé, fréquence(s) de coupure, pente des variations.

2.4) Même question dans le cas de la mise en série de 2 filtres identiques.

2.5) Pour améliorer les caractéristiques du filtrage, on choisit d'utiliser un filtre de Butterworth défini par :

$$|T(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}$$

Comparer la pente du diagramme de gain de ce filtre lorsque $f \to \infty$, ainsi que sa valeur à la fréquence de coupure, et les comparer avec celles du filtre de la question 2.4), avec N=2.

3) Filtrage numérique (6 points)

Pour pouvoir programmer le système précédent, de transmittance

$$T(p) = \frac{1}{p+0{,}01}$$

on échantillonne sa réponse impulsionnelle avec une fréquence d'échantillonnage T_e=100Hz.

3.1) Donner les 4 premiers éléments de cette réponse (on limitera la précision à 4 décimales).

3.2) Déterminer sa transmittance en z.

3.3) A partir de cette fonction de transfert, retrouver la réponse impulsionnelle par la formule des résidus.

3.4) Déterminer l'équation aux différences correspondante du système. L'appliquer à la séquence suivante {1,0,0,0}, et comparer les résultats avec les résultats précédents.

3.5) Ce filtre est-il de type RIF ou RII ? Justifier la réponse.

Annexe

1) Extrait de la table des transformées de Fourier usuelles

s(t)	**S(f)=F[s(t)]**
$\delta(t)$	1
1	$\delta(f)$
$s(t)=\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}\left[\delta(f+f_0)+\delta(f-f_0)\right]$
$s(t)=\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{j}{2}\left[\delta(f+f_0)-\delta(f-f_0)\right]$
$\Pi(\frac{t}{T})=\mathrm{rect}\left[\frac{t}{T}\right]$	$T\sin c(Tf)$
$\mathrm{tri}\left[\frac{t}{T}\right]$	$T\sin c^2(Tf)$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_0)$	$\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(f-\frac{n}{T_0})$

2) Divers

<u>*Sinus cardinal*</u>

Définition

$$\sin c(t)=\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

Propriété

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin c(\tau)d\tau=1 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty}\sin c^2(\tau)d\tau=1$$

<u>*Suite numérique*</u>

Une suite (u_n) est géométrique ssi il existe un réel r tel que pour tout n :

$$u_{n+1} = r\, u_n$$

La somme S_n des n premiers termes de la suite ($S_n=u_0+u_1+...+u_n$) est égale à, si $r\neq 1$:

$$S_n = u_0\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$