Conservatoire National des Arts et Métiers - Rouen
"Signal déterministe"
- Examen partiel 1 -

Date : vendredi 17 mars 2006
Durée : 2 heures
Enseignant : Benoît DECOUX
Documents autorisés : résumé de cours (distribué en début d'examen)

1) On considère un système linéaire et invariant dans le temps, caractérisé par l'équation différentielle suivante :

$$k.s'(t)+s(t)=e(t)$$

avec k une constante réelle.
En supposant les conditions initiales nulles, déterminer sa transmittance de Laplace. En déduire sa réponse impulsionnelle.

Solution

On applique la transformée de Laplace des 2 côtés de l'équation :

$$\tau.pS(p)+S(p)=E(p)$$

$$S(p)(\tau.p+1)=E(p)$$

$$\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{1}{\tau.p+1}$$

C'est la transmittance de Laplace demandée :

$$\frac{S(p)}{E(p)}=T(p)$$

On en déduit la réponse impulsionnelle du système, en remplaçant E(p) par la transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac, soit :

$$E(p)=1$$

On a donc :

$$S(p)=\frac{1}{\tau.p+1}$$

On cherche à le mettre sous la forme

$$S(p)=k\frac{1}{p+a} \text{ avec k constante}$$

$$S(p)=\frac{1}{\tau}\frac{1}{p+\frac{1}{\tau}}$$

Enfin, on applique la transformée de Laplace inverse pour avoir la réponse impulsionnelle :

$$L^{-1}(S(p))=\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}=h(t)$$

2) Déterminer la réponse indicielle de ce système (réponse à un échelon), de 2 manières différentes :
   a) en utilisant le produit de convolution ;
   b) en utilisant la transformée de Laplace.

Solution

a) On applique la formule de convolution :

$$s(t)=(e*h)(t)=\int_0^t h(t-\tau)e(\tau)d\tau=\int_0^t h(\tau)e(t-\tau)d\tau$$

On remplace h(t) par son expression et u(t) par 1 puisque l'intervalle d'intégration est déjà [0,t[:

$$s(t)=(e*h)(t)=\frac{1}{\tau}\int_0^t e^{-\frac{t-\delta}{\tau}}d\delta=\frac{1}{\tau}\int_0^t e^{-\frac{t}{\tau}}.e^{\frac{\delta}{\tau}}d\delta=\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\int_0^t e^{\frac{\delta}{\tau}}d\delta=e^{-\frac{t}{\tau}}\left[e^{\frac{\delta}{\tau}}\right]_0^t=e^{-\frac{t}{\tau}}\left[e^{\frac{t}{\tau}}-1\right]=1-e^{-\frac{t}{\tau}},\ t>0$$

b) On reprend la formule de la transmittance, et on remplace E(p) par la transformée de Laplace de l'échelon :

$$E(p)=\frac{1}{p}$$

d'où

$$S(p)=\frac{1}{\tau.p+1}E(p)=\frac{1}{\tau.p+1}.\frac{1}{p}$$

Pour connaître la transformée inverse de cette expression, on effectue une décomposition en éléments simples :

$$S(p)=\frac{A}{\tau.p+1}+\frac{B}{p}$$

A et B s'obtiennent par la méthode des résidus :

$$A=\left[S(p)\times(p+1/\tau)\right]_{p=-1/\tau}=\left[\frac{1}{p}\right]_{p=-1/\tau}=-\tau$$

$$B=\left[S(p)\times p\right]_{p=0}=\left[\frac{1}{p+1/\tau}\right]_{p=0}=\tau$$

d'où :

$$S(p)=\frac{1}{\tau}\frac{-\tau}{p+1/\tau}+\frac{\tau}{p}=\frac{-1}{p+1/\tau}+\frac{\tau}{p}$$

La réponse temporelle s'obtient par transformée de Laplace inverse :

$$s(t)=1-e^{-\frac{t}{\tau}},\ t>0$$

3) On considère le signal défini par :

$$x(t)=t \text{ pour } t \in [0,T[$$

a) Déterminer sa fonction d'autocorrélation.
b) En déduire l'énergie du signal et sa puissance totale.
c) Quelle aurait été la fonction de corrélation si le signal avait été périodisé de période T ? (la réponse doit être justifiée, mais aucun calcul n'est demandé).

Solution

a) L'autocorrélation est définie par :

$$C(\tau)=\int_{t=-\infty}^{+\infty}x(t).x(t-\tau)dt$$

On doit envisager différents cas selon la valeur du décalage τ :
- Si τ<-T, les 2 signaux ne se chevauchent pas du tout, donc l'intégrale est nulle.
- Si -T<τ<0, les 2 signaux se chevauchent sur l'intervalle [0, τ+T]

$$C(\tau)=\int_{t=0}^{\tau+T} t(t-\tau)dt=\int_{t=0}^{\tau+T}\left(t^2-t\tau\right).dt=\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}\tau\right]_0^{\tau+T}=\left(\frac{(\tau+T)^3}{3}-\frac{(\tau+T)^2}{2}\tau\right)$$
$$=\left(2(\tau+T)^3-3(\tau+T)^2\tau\right)=\left(2(\tau+T)(\tau^2+2\tau T+T^2)-3(\tau^2+2\tau T+T^2)\tau\right)$$
$$=\left(2(\tau^3+2\tau^2T+\tau T^2+\tau^2T+2\tau T^2+T^3)-3(\tau^3+2\tau^2T+\tau T^2)\right)$$
$$=\left(2(\tau^3+3\tau^2T+3\tau T^2+T^3)-3(\tau^3+2\tau^2T+\tau T^2)\right)$$
$$=-\tau^3+3\tau T^2+2T^3$$

- Si 0<τ<T, les 2 signaux se chevauchent sur l'intervalle [τ,T]

$$C(\tau)=\int_{t=\tau}^{T} t(t-\tau)dt=\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}\tau\right]_\tau^{T}=\frac{T^3}{3}-\frac{T^2}{2}\tau-\frac{\tau^3}{3}+\frac{\tau^3}{2}=2T^3-3T^2\tau+\tau^3$$

- Si τ>0, les 2 signaux ne se chevauchent pas du tout, donc l'intégrale est nulle.

Finalement, la fonction d'autocorrélation est composée de deux portions de courbes représentatives de polynômes du 3e degré, paire (en effet, $C(-\tau)=C(-\tau)$ **),** formant donc un pic en $\tau=0$.

b) L'énergie est la valeur de la fonction d'autocorrélation en τ=0, donc :

$$E=2T^3$$

Cette énergie étant finie, la puissance du signal est nulle.

c) Dans le cas d'un signal périodique, l'intervalle d'intégration est ramené à la période. Si le signal est périodisé, la fonction d'autocorrélation devient périodique également, de même période. En effet, cela revient à continuer à décaler l'un des 2 signaux, le chevauchement entre les 2 signaux se reproduit à l'identique périodiquement.

4) On considère que le signal précédent est échantillonné aux instants d'échantillonnage kT/2, avec k=0,1,2. Le signal est donc transformé en une séquence de 3 éléments $\{x_k\}$={0 ; 0,5 ; 1}.
   On définit une fonction d'autocorrélation discrête par :

$$C_{xx}(k)=\sum_{i=0}^{n-1} x_{i+k}x_i\text{, k=-2,-1,0,1,2 ; n=3}$$

   où les x_i représentent les éléments de la séquence $\{x_k\}$. Les éléments situés en dehors de la séquence seront pris nuls.
   a) Calculer tous les éléments de cette fonction d'autocorrélation (en détaillant le calcul pour au moins une valeur de k).
   b) Recommencer ce calcul en utilisant la formule de corrélation suivante :

$$C_{xx}(k)=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+k}-\overline{x}).(x_i-\overline{x})\text{, k=-2,-1,0,1,2 ; n=3}$$

   où $\overline{x}$ représente la valeur moyenne de la séquence. Cette moyenne devra être également soustraite des éléments situés en dehors de la séquence.

c) Calculer la variance des éléments de la séquence et la comparer avec la valeur de la corrélation utilisant la 2e formule, pour k=0. Conclure sur la relation entre cette formule et variance.

d) De ces 2 expressions de la corrélation, quelle est celle qui permet de détecter des similarités entre 2 signaux ou entre 2 parties d'un même signal ?

Solution

a) Détail du calcul pour k=-2 :

$$C(-1)=\sum_{i=0}^{2}x_{i-1}x_i = x_{-1}x_0 + x_0x_1 + x_1x_2 = 0\times 0 + 0\times 0{,}5 + 0{,}5\times 1 = 0{,}5$$

La séquence complète de la fonction d'autocorrélation est :

$\{c_i\}=\{0 ; 0{,}5 ; 1{,}25 ; 0{,}5 ; 0\}$

b) La moyenne des éléments du signal est définie par :

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}x_i \text{ ; avec n=3 : } \bar{x}=\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{2}x_i=\frac{0+0{,}5+1}{3}=\frac{1{,}5}{3}=0{,}5$$

La séquence centrée est :

$\{x_n\}=\{-0{,}5 ; 0 ; 0{,}5\}$

On doit centrer également les éléments situés en déhors de la séquence, nécessaires pour le calcul. Les éléments supplémentaires nécessaires seront donc pris égaux à –0,5.

Détail du calcul pour k=-2 :

$$C(-2)=\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{2}x_{i-1}x_i=\frac{1}{3}(x_{-2}x_0 + x_{-1}x_1 + x_0x_2)=\frac{1}{3}(-0{,}5\times(-0{,}5)+0{,}5\times 0-0{,}5\times 0{,}5)=\frac{-0{,}25}{3}$$

La séquence résultat est :

$\{c_i\}=\{0 ; 0{,}25 ; 0{,}5 ; -0{,}25 ; -0{,}5\}/3$

Remarque : on se rend compte que cette manière de procéder n'est pas la meilleure car la fonction d'autocorrélation n'est plus symétrique (alors qu'elle l'est en théorie). Mais c'est tout le problème de la gestion des effets de bords, pour laquelle il n'existe pas une méthode unique.

c) La variance est définie par :

$$v=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(x_i-\bar{x})^2$$

Avec n=3 :

$$v=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(x_i-\bar{x})^2=\frac{(0-0{,}5)^2+(0{,}5-0{,}5)^2+(1-0{,}5)^2}{3}=\frac{0{,}25+0{,}25}{3}=\frac{0{,}5}{3}=0{,}1666$$

On retrouve la valeur de la corrélation pour k=0. C'est une illustration du fait que la 2e formule de corrélation correspond au calcul de la variance statistique, pour k= 0 c'est à dire sans décalage. Pour k≠0, elle correspond à un calcul de covariance entre le signal et ce même signal décalé.

d) L'expression de la corrélation permettant de détecter des similarités dans des signaux ou dans des parties différentes d'un même signal est la 2e (celle qui correspond à la variance statistique).