Cours et Travaux Dirigés de

Traitement du Signal Déterministe

Benoît Decoux (benoit.decoux@wanadoo.fr)

Exercices - v 1.0

3^{e} partie : "Filtrage"

Filtrage analogique

Exercice : Filtre passe-haut du 2^e ordre

On considère la tranmittance d'un filtre passe-bas du 2^e ordre définie par :

$$H(p) = \frac{1}{1 + 2\xi \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$$

Montrer que ce filtre est forcément stable.

Indications

1) On factorise cette fonction de transfert et on étudie ses pôles selon la valeur de ξ.
2) Le filtre est stable si la partie réelle des pôles est négative.

Solution

1) Pour cela on factorise cette fonction de transfert sous la forme de fonctions de transfert du 1^er ordre. On est donc ramené à étudier les racines du dénominateur.

$$\Delta = b^2 - 4ac = \frac{4}{\omega_0^2}\left(\xi^2 - 1\right)$$

3 cas :

• Δ>0 ↔ ξ>1

Il y a 2 solutions réelles :

$$p_{1,2} = \frac{-\frac{2\xi}{\omega_0} \pm \frac{2}{\omega_0}\sqrt{\xi^2 - 1}}{\frac{2}{\omega_0^2}} = \omega_0(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1})$$

La fonction de transfert s'écrit donc :

$$H(p) = \frac{1}{(p - p_1)(p - p_2)} = \frac{1}{(p - \omega_0(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}))(p - \omega_0(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}))}$$

Ces 2 pôles sont réels purs et négatifs. Dans le plan complexe ils sont situés sur l'axe réel à gauche de l'axe imaginaire ; ils correspondent donc à un système stable.

• Δ=0 ↔ ξ=1

Il y a une solution double égale à :

$$p_0 = -\xi\omega_0$$

La fonction de transfert s'écrit :

$$H(p) = \frac{1}{(p - p_0)^2}$$

Ce pôle est encore réel pur et négatif ; il correspond également à un système stable.

• Δ>0 ↔ ξ<1

Il y a 2 solutions complexes conjuguées :

$$p_{1,2} = \omega_0(-\xi \pm j\sqrt{1 - \xi^2})$$

La fonction de transfert s'écrit :

$$H(p)=\frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)}=\frac{1}{(p-\omega_0(-\xi-j\sqrt{\xi^2-1}))(p-\omega_0(-\xi+j\sqrt{\xi^2-1}))}$$

Ces 2 pôles sont complexes conjugués. Leur partie réelle est négative. Ils correspondent donc encore à un système stable.

Exercice : Filtre de Butterworth

1) Déterminer les coefficients d'un filtre de Butterworth passe-bas d'ordre 4 et de fréquence de coupure 100Hz, ainsi que sa transmittance de Laplace sous forme de 2 transmittances standard du 2^{e} ordre.
2) Quelle est la pente de décroissance du gain quand la fréquence tend vers l'infini ? Et pour les 2 filtres de la décomposition ?

Indications

On rappelle l'expression des pôles démontrée en cours :

$$p_n=\omega_c\left(-\sin\left(\frac{2n+1}{2N}\pi\right)+j\cos\left(\frac{2n+1}{2N}\pi\right)\right),\ n=0,\ldots,N-1$$

Solution

Ici, N=4. Les 4 pôles sont définis par :

$$p_0=\omega_c\left(-\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)+j\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right),\ p_1=\omega_c\left(-\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)+j\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right),$$
$$p_2=\omega_c\left(-\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)+j\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)\right),\ p_3=\omega_c\left(-\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)+j\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right)$$

On remarque que p_0 et p_3 d'une part, p_1 et p_2 d'autre part, sont complexes conjugués :

$$p_0=p_3^{*}\quad\text{et}\quad p_1=p_2^{*}$$

La transmittance de ce filtre est définie par :

$$H(p)=\prod_{n=0}^{N-1}\frac{-p_n}{p-p_n}=\frac{-p_0}{p-p_0}.\frac{-p_1}{p-p_1}.\frac{-p_2}{p-p_2}.\frac{-p_3}{p-p_3}$$
$$=\frac{|p_0|^2|p_1|^2}{(p-p_0)(p-p_0^*)(p-p_1)(p-p_1^*)}$$

par utilisation des relations ci-dessus et de la propriété des complexes :

$$|z|^2=zz^*$$

On peut décomposer cette transmittance en 2 transmittances du 2^{e} ordre, en regroupant les pôles conjugués entre eux :

$$H(p)=\frac{|p_0|^2}{(p-p_0)(p-p_0^*)}.\frac{|p_1|^2}{(p-p_1)(p-p_1^*)}$$
$$=\frac{|p_0|^2}{p^2-p(p_0+p_0^*)+p_0p_0^*}.\frac{|p_1|^2}{p^2-p(p_1+p_1^*)+p_1p_1^*}$$
$$=\frac{|p_0|^2}{p^2-2p\,\mathrm{Re}(p_0)+p_0p_0^*}.\frac{|p_1|^2}{p^2-2p\,\mathrm{Re}(p_1)+p_1p_1^*}$$
$$=\frac{\omega_c^2}{p^2-2\omega_c p(-\sin(\pi/8))+\omega_c^2}.\frac{\omega_c^2}{p^2-2\omega_c p(-3\sin(\pi/8))+\omega_c^2}$$

$$= \frac{\omega_c^2}{p^2 + 0{,}765\omega_c p + \omega_c^2} \cdot \frac{\omega_c^2}{p^2 + 1{,}848\omega_c p + \omega_c^2}$$

$$= \frac{1}{\frac{p^2}{\omega_c^2} + 0{,}765\frac{p}{\omega_c} + 1} \cdot \frac{1}{\frac{p^2}{\omega_c^2} + 1{,}848\frac{p}{\omega_c} + 1} = H_1(p).H_2(p)$$

Par identification avec la fonction de transfert d'un filtre élémentaire du 2^e ordre, le terme de gauche correspond à un coefficient d'amortissement ξ égal à 0,765/2=0,383, et le 2^e à 1,848/2=0,924.

2) La pente de décroissance d'un filtre passe-bas du 2^e ordre de Butterworth est –20N dB/décade. Ici N=4 donc la pente est de 80dB/décade. Pour les 2 filtres du 2^e ordre de la décomposition, elle est de –40dB/décade pour chacun. La somme des 2 fait bien –80 (les pentes de variation du gain des filtre en cascade s'ajoutent en repère logarithmique sur l'axe des fréquences).

Exercice : Calcul d'un passe-haut à partir d'un passe-bas

On considère la fonction de transfert harmonique d'un filtre passe-bas du 2^e ordre définie par :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi j\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Déterminer la fonction de transfert d'un filtre passe-haut du 2^e ordre à partir de celle-ci.

Solution

On remplace $j\frac{\omega}{\omega_0}$ par $-j\frac{\omega_0}{\omega}$ (correspondant à la transformation $p \to \frac{1}{p}$, et on remonte la variable ω :

$$\frac{1}{1 + 2\xi j\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{1 - 2\xi j\frac{\omega_0}{\omega} + \left(j\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$$

$$\times\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2\xi j\frac{\omega}{\omega_0} + 1}$$

Filtrage numérique

Exercice : Détermination directe de la réponse impulsionnelle d'un filtre

1) Un système numérique possède la fonction de transfert suivante :

$$H(z) = \frac{z}{z - 0{,}9}$$

Déterminer les 4 premiers éléments de sa réponse impulsionnelle par application directe de la transformée d'un signal élémentaire.
2) Etudier sa stabilité par l'intermédiaire de ses pôles puis par celui de sa réponse impulsionnelle.
3) Mêmes questions avec la fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{z}{z - 1{,}1}$$

Solution

1) La réponse impulsionnelle est la transformée en Z inverse de la fonction de transfert. La décomposition en éléments simples et TZ inverse donne donc la réponse impulsionnelle.

$$H(z) = \frac{z}{z-0{,}9} = \frac{1}{1-0{,}9z^{-1}}$$

On identifie cette fonction de transfert avec la transformée d'un signal exponentiel discret :

$$s(n) = e^{-anT} \xrightarrow{Z} S(z) = \frac{1}{1-z^{-1}e^{-aT}}$$

d'où

$$h(n) = e^{-anT} = (e^{-aT})^n = 0{,}9^n$$

On n'a plus qu'à remplacer n par 0,1,2,3 :

$$h(0) = 1 \;;\; h(1) = 0{,}9^1 \;;\; h(2) = 0{,}9^2 = 0{,}81 \;;\; h(3) = 0{,}9^3 = 0{,}729$$

2) Les pôles du système se limitent à un seul. Pour le faire apparaître, il faut mettre la fonction de transfert sous la forme :

$$\frac{A_i}{z - z_i}$$

On a :

$$H(z) = \frac{1}{1-0{,}9z^{-1}} = \frac{z}{z-0{,}9}$$

Le pôle est réel pur, égal à 0,9. Il est à l'intérieur du cercle unité, donc le système est stable.

La réponse impulsionnelle est une suite géométrique de raison 0,9. On peut donc calculer :

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(n) = h(0) \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^n}{1-r} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-0{,}9^n}{1-0{,}9} = \frac{1}{0{,}1} = 10$$

C'est une valeur finie donc le système est stable.

3)

$$h(nT) = e^{-anT} = (e^{-aT})^n = 1{,}1^n$$

$$h(0) = 1 \;;\; h(1) = 1{,}1^1 = 1{,}1 \;;\; h(2) = 1{,}1^2 = 1{,}21 \;;\; h(3) = 1{,}1^3 = 1{,}331$$

On voit bien que le système va être instable. Pour le démontrer, il suffit de calculer :

$$S_\infty = u_0 \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^n}{1-r} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-1{,}1^n}{1-1{,}1} = \infty$$

On peut également vérifier que le pôle 1,1 est à l'extérieur du cercle unité.

Exercice : Détermination de la réponse impulsionnelle d'un filtre par la méthode des résidus

Un système numérique possède la fonction de transfert suivante :

$$H(z) = \frac{z}{z-0{,}9}$$

Déterminer les 4 premiers éléments de sa réponse impulsionnelle par la méthode des résidus.

Solution

La réponse impulsionnelle est la transformée en Z inverse de la fonction de transfert. La méthode des résidus permet de réaliser cette transformation inverse de la fonction de transfert. Elle donne donc directement la réponse impulsionnelle.

$$h(n) = \sum \text{ résidus de } H(z)z^{n-1}$$

Le résidu du pôle z_i est défini par :

$$Res_{z_i} = \lim_{z \to z_i} (H(z)z^{n-1}(z - z_i))$$

Ici la fonction de transfert ne possède qu'un seul pôle :

$$z_1 = 0,9$$

C'est un pôle simple donc il n'y a qu'un seul résidu :

$$h(n) = Res_{z_1 = 0,9} = \lim_{z \to z_1 = 0,9} (H(z)z^{n-1}(z - 0,9))$$

$$= \lim_{z \to z_1 = 0,9} (\frac{z}{z - 0,9} z^{n-1}(z - 0,9)) = \lim_{z \to z_1 = 0,9} z^n = 0,9^n$$

Comme dans l'exercice précédent, ses 4 premiers éléments sont :

$$h(0) = 1 \;;\; h(1) = 0,9^1 = 0,9 \;;\; h(2) = 0,9^2 = 0,81 \;;\; h(3) = 0,9^3 = 0,729$$

Exercice : Equation aux différences et réponse indicielle

On cherche la réponse indicielle (=à un échelon) d'un système numérique possèdant la fonction de transfert suivante :

$$H(z) = 0,1 \frac{z}{z - 0,9}$$

1) Exprimer l'équation aux différences correspondant à cette fonction de transfert.
2) Déterminer les 4 premiers éléments de sa réponse indicielle, puis les représenter.

Indications

1) On fait d'abord apparaître les puissance négatives de z, puis on re-passe dans le domaine temporel en utilisant la propriété de retard de la TZ.

Solution

1)

$$H(z) = 0,1 \frac{z}{z - 0,9} = \frac{0,1}{1 - 0,9z^{-1}} = \frac{S(z)}{E(z)}$$

$$(1 - 0,9z^{-1})S(z) = 0,1E(z)$$

$$S(z) - 0,9z^{-1}S(z) = E(z)$$

$$s(n) - 0,9s(n-1) = e(n)$$

$$s(n) = 0,1e(n) + 0,9s(n-1)$$

2) On suppose s(n-1)=0, et e(n)=1 pour tout n≥0, =0 pour n<0 (échelon discret). On a :

$$s(0) = 0,1e(0) + 0,9s(-1) = 0,1$$

$$s(1) = 0,1e(1) + 0,9s(0) = 0,1 + 0,9 \times 0,1 = 0,1 + 0,09 = 0,19$$

$$s(2) = 0,1e(2) + 0,9s(1) = 0,1 + 0,9 \times 0,19 = 0,1 + 0,171 = 0,271$$

$$s(3) = 0,1e(3) + 0,9s(2) = 0,1 + 0,9 \times 0,271 = 0,1 + 0,244 = 0,344$$

Exercice : Transformation continu vers discret par échantillonnage de la réponse impulsionnelle

On considère le filtre passe-bas du 1^er ordre de fonction de transfert harmonique

$$T(p) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

avec pour fréquence de coupure f_c=10Hz.

1) Donner l'expression de la réponse impulsionnelle de ce système.

2) On échantillonne sa réponse impulsionnelle avec une fréquence d'échantillonnage f_e=1000Hz. Donner les 4 premiers éléments de cette réponse (on limitera la précision à 4 décimales).

3) Déterminer la transmittance en z de ce filtre.

4) A partir de cette fonction de transfert, retrouver la réponse impulsionnelle par la formule des résidus.

5) Déterminer l'équation aux différences correspondante du système. L'appliquer à la séquence suivante {1,0,0,0}, et comparer les résultats avec les résultats précédents.

6) Ce filtre est-il de type RIF ou RII ? Justifier la réponse.

Indications

1)
- On transforme la fonction de transfert en transmittance de Laplace
- On en déduit la réponse impulsionnelle
- On échantillonne cette réponse

Solution

---

1) On met cette transmittance sous la forme :

$$T(p) = k\frac{1}{p - p_0}$$

où k est une constante :

$$T(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_c}} = \frac{\omega_c}{\omega_c + p}$$

La réponse impulsionnelle du filtre est la transformée de Laplace inverse :

$$h(t) = \omega_c e^{-\omega_c t}$$

2) L'échantillonnage consiste à remplacer t par nT_e et à multiplier l'amplitude par T_e :

$$h(n) = T_e\omega_c e^{-\omega_c nT_e}$$

Ses 4 premiers éléments ont donc pour expressions :

$$h(0) = T_e\omega_c \ ; \ h(1) = T_e\omega_c e^{-\omega_c T_e} \ ; \ h(2) = T_e\omega_c e^{-2\omega_c T_e} \ ; \ h(3) = T_e\omega_c e^{-3\omega_c T_e}$$

et pour valeurs :

$$h(0) = 0{,}0628 \ ; \ h(1) = 0{,}0628e^{-62{,}8\times 0{,}001} = 0{,}059 \ ;$$
$$h(2) = 0{,}0628e^{-2\times 62{,}8\times 0{,}001} = 0{,}0554 \ ; \ h(3) = 0{,}0628e^{-3\times 62{,}8\times 0{,}001} = 0{,}052$$

3) La transmittance (ou fonction de transfert) en z est la transformée en z de la réponse impulsionnelle. On applique donc la définition de la TZ à cette dernière :

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n).z^{-n} = T_e\omega_c \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\omega_c nT_e}.z^{-n} = T_e\omega_c \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\omega_c T_e}.z^{-1})^n$$

Cette somme est une progression géométrique de raison $e^{-\omega_c T_e}z^{-1}$. On peut la mettre sous la forme :

$$H(z) = T_e\omega_c \frac{1}{1 - e^{-\omega_c T_e}z^{-1}} = 0{,}0628\frac{1}{1 - 0{,}9391z^{-1}} = 0{,}0628\frac{z}{z - 0{,}9391}$$

4) La réponse impulsionnelle est la transformée en z inverse de la fonction de transfert. L'intégration par la méthode des résidus de la fonction de transfert donne directement la réponse impulsionnelle.

$$h(n) = \sum \text{ résidus de } H(z)z^{n-1}$$

Le résidu du pôle z_i est défini par :

$$Res_{z_i} = \lim_{z \to z_i}(H(z)z^{n-1}(z - z_i))$$

Ici H(z) ne possède qu'un seul pôle :

$$z_1 = 0{,}9391$$

C'est un pôle simple donc il n'y a qu'un seul résidu :

$$h(n) = \text{Res}_{z_1=0{,}9391} = \lim_{z\to z_1=0{,}9391}(H(z)z^{n-1}(z-0{,}9391))$$

$$= \lim_{z\to z_1=0{,}9391}(0{,}0628\frac{z}{z-0{,}9391}z^{n-1}(z-0{,}9391)) = 0{,}0628\lim_{z\to z_1=0{,}9391} z^n = 0{,}9391^n$$

Ses 4 premiers éléments sont :

$$h(0) = 0{,}0628\ ;\ h(1) = 0{,}0628\times 0{,}9391^1 = 0{,}0628\times 0{,}9391 = 59\ ;$$

$$h(2) = 0{,}0628\times 0{,}9391^2 = 55{,}4\ ;\ h(3) = 0{,}0628\times 0{,}9391^3 = 52$$

On retrouve bien les résultats obtenus par l'échantillonnage de la réponse impulsionnelle.

Remarque : La relation entre le pôle z_i et le pôle de la transmittance de Laplace p_i est :

$$z_i = e^{p_i T_e}$$

Ici la transmittance de Laplace ne possède qu'un seul pôle : $p_0=-\omega_c=-62{,}8$. Il correspond bien au pôle de la transmittance en z :

$$z_1 = e^{p_0 T_e} = e^{-0{,}0628} = 0{,}9391$$

5) L'équation aux différences s'obtient à partir de la fonction de transfert, en utilisant la propriété de retard :

$$H(z) = 0{,}0628\frac{1}{1-0{,}9391z^{-1}} = \frac{S(z)}{E(z)}$$

$$S(z).(1-0{,}9391z^{-1}) = 0{,}0628E(z)$$

$$S(z) - 0{,}9391z^{-1}S(z) = 0{,}0628E(z)$$

$$s(n) - 0{,}9391s(n-1) = 0{,}0628e(n)$$

$$s(n) = 0{,}0628e(n) + 0{,}9391s(n-1)$$

Les 4 premiers éléments de cette séquence sont :

$$s(0) = 0{,}0628e(0) + 0{,}9391s(-1) = 0{,}0628$$

$$s(1) = 0{,}0628e(1) + 0{,}9391s(0) = 0{,}0628\times 0{,}9391 = 0{,}059$$

$$s(2) = 0{,}0628e(2) + 0{,}9391s(1) = 0{,}0628\times 0{,}059^2 = 0{,}0554$$

$$s(3) = 0{,}0628e(3) + 0{,}9391s(2) = 0{,}0628\times 0{,}059^3 = 0{,}052$$

On retrouve bien encore la réponse impulsionnelle, ce qui est normal puisque le signal d'entrée est l'impulsion de Kronecker.

6) Le filtre est de type RII : même s'il est stable, l'équation aux différences comporte un terme de récurence.

Exercice : Transformation continu-discret par équivalence de la dérivation

1) Donner l'équation de récurrence correspondant à la fonction de transfert harmonique d'un filtre passe-bas du 1^{er} ordre, par utilisation de l'équivalence de la dérivation.
2) Application numérique : fréquence de coupure f_c=1Hz ; f_e=10Hz
3) Ecrire un algorithme permettant de réaliser ce filtrage

Solution

1) La fonction de transfert harmonique définie par :

$$H(j\omega)=\frac{1}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_c}}$$

et la transmittance de Laplace correspondante :

$$H(p)=\frac{1}{1+\dfrac{p}{\omega_c}}$$

Dans la méthode de l'équivalence de la dérivation, on remplace p par

$$\frac{1-z^{-1}}{T_e}$$

On obtient alors

$$H(z)=\frac{1}{1+\dfrac{1-z^{-1}}{\omega_c T_e}}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{\omega_c T_e}-\dfrac{z^{-1}}{\omega_c T_e}}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{\omega_c T_e}}.\frac{1}{1-\dfrac{1}{\omega_c T_e+1}z^{-1}}$$

D'où l'équation de récurrence :

$$s(n)=\frac{1}{1+\dfrac{1}{\omega_c T_e}}e(n)+\frac{1}{\omega_c T_e+1}s(n-1)$$

2) AN :

$$s(n)=\frac{1}{1+\dfrac{1}{2\pi\times1\times10}}e(n)+\frac{1}{2\pi\times1\times10+1}s(n-1)=0{,}9843e(n)+0{,}0156s(n-1)$$

3) En supposant que les indices des séquences commencent à 1 :

```
s(1)=0
pour n variant de 2 à taille de la séquence e
        s(n)=0,9843e(n)+0,0156s(n-1)
fin pour
```

Exercice : Synthèse d'un filtre RIF par développement en série de Fourier de la réponse en fréquence

On cherche à réaliser un filtre passe-bas avec N=6 coefficients, obtenus par développement en série de Fourier de la réponse en fréquence recherchée, avec f_c=10Hz et f_e=100Hz.

1) Donner l'expression de ces coefficients.
2) Les calculer.
3) Que peut-on en déduire sur le déphasage introduit par ce filtre en fonction de la fréquence, puis sur le temps de propagation de groupe ?
4) Ecrire l'équation aux différences de ce filtre.
5) Application à l'impulsion de Kronecker. En déduire le lien entre les coefficients du filtre sa réponse impulsionnelle.
6) Déterminer la fonction de transfert en z de ce filtre.
7) En conclure la stabilité du filtre.

Solution

1) Les coefficients sont donnés par la relation :

$$h_k = -\frac{1}{(k-p)\pi}\sin\big(2\pi(k-p)F_c\big) = -2F_c \sin c\big(2(k-p)F_c\big)\text{, k=0,1,…,5}$$

où F_c est la fréquence de coupure relative (ou normalisée), c'est à dire divisée par la fréquence d'échantillonnage :

$$F_c=10/100=0,1$$

et p=N/2=3 car N pair. D'où :

$$h_k = -\frac{1}{(k-3)\pi}\sin\big(0,2\pi(k-3)\big) = -0,2\sin c\big(0,2(k-3)\big)\text{, k=0,1,…,5}$$

que l'on développe selon k :

$$h_0 = -\frac{1}{-3\pi}\sin(-0,6\pi) = 0,1009\text{ , } h_1 = \frac{1}{-2\pi}\sin(-0,4\pi) = 0,15\text{ , } h_2 = -\frac{1}{-\pi}\sin(-0,2\pi) = 0,19\text{ ,}$$

$$h_3 = 2F_c = 0,2\text{ , } h_4 = \frac{1}{\pi}\sin(0,2\pi) = 0,19\text{ , } h_5 = \frac{1}{2\pi}\sin(0,4\pi) = 0,15$$

3) On utilise la propriété suivante : si les coefficients d'un filtre RIF présentent une symétrie par rapport à leur valeur centrale (d'indice N/2 si N pair, N/2-1 si N impair), le filtre est à phase linéaire en fonction de la fréquence. Il possède donc un temps de propagation de groupe constant.

4) L'équation aux différences de ce filtre est définie par :

$$s(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)e(n-k) = h(0)e(n) + h(1)e(n-1) + h(2)e(n-2) + h(3)e(n-3) + h(4)e(n-4) + h(5)e(n-5)$$

$$\leftrightarrow \quad s(n) = 0,1e(n) + 0,15e(n-1) + 0,19e(n-2) + 0,2e(n-3) + 0,19e(n-4) + 0,15e(n-5)$$

5) L'impulsion de Kronecker est définie par : $\delta_k = \{1,0,0,0,0,0,0...\}$

On calcule quelques éléments de la signal de sortie (en prenant e causal, c'est à dire e(i)<0 pour i<0) :

$$s(0) = 0,1e(0) + 0,15e(-1) + 0,19e(-2) + 0,2e(-3) + 0,19e(-4) + 0,15e(-5) = 0,1e(0) = 0,1$$
$$s(1) = 0,1e(1) + 0,15e(0) + 0,19e(-1) + 0,2e(-2) + 0,19e(-3) + 0,15e(-4) = 0,15e(0) = 0,15$$
$$s(2) = 0,1e(2) + 0,15e(1) + 0,19e(0) + 0,2e(-1) + 0,19e(-2) + 0,15e(-3) = 0,19e(0) = 0,19$$
$$s(3) = 0,1e(3) + 0,15e(2) + 0,19e(1) + 0,2e(0) + 0,19e(-1) + 0,15e(-2) = 0,12e(0) = 0,2$$
$$s(4) = 0,1e(4) + 0,15e(3) + 0,19e(2) + 0,2e(1) + 0,19e(0) + 0,15e(-1) = 0,19e(0) = 0,19$$
$$s(5) = 0,1e(5) + 0,15e(4) + 0,19e(3) + 0,2e(2) + 0,19e(1) + 0,15e(0) = 0,15e(0) = 0,15$$

On retrouve bien les coefficients du filtre, en réponse à l'impulsion de Kronecker. Les coefficients du filtre correspondent donc bien à la réponse impulsionnelle du filtre.

6) Pour déterminer la fonction de transfert du filtre, il suffit d'appliquer la transformée en z à l'équation de récurrence. Chaque échantillon retardé du signal d'entrée va donner une puissance négative de z, par application de la propriété de retard temporel :

$$s(n) = 0,1e(n) + 0,15e(n-1) + 0,19e(n-2) + 0,2e(n-3) + 0,19e(n-4) + 0,15e(n-5)$$

$$\leftrightarrow \quad S(z) = 0,1E(z) + 0,15z^{-1}E(z) + 0,19z^{-2}E(z) + 0,2z^{-3}E(z) + 0,19z^{-4}E(z) + 0,15z^{-5}E(z)$$

$$S(z) = (0,1 + 0,15z^{-1} + 0,19z^{-2} + 0,2z^{-3} + 0,19z^{-4} + 0,15z^{-5})E(z)$$

$$\frac{S(z)}{E(z)} = 0,1 + 0,15z^{-1} + 0,19z^{-2} + 0,2z^{-3} + 0,19z^{-4} + 0,15z^{-5} = H(z)$$

$$H(z) = \frac{0,1z^5 + 0,15z^4 + 0,19z^3 + 0,2z^2 + 0,19z^1 + 0,15}{z^5}$$

7) Cette fonction de transfert comporte un seul pôle, d'ordre 5, égal à 0. Ce pôle étant à l'intérieur du cercle unité, le système ne peut pas être instable.