



**Cours et Travaux Dirigés de
Traitement du Signal Déterministe**

Benoît Decoux (benoit.decoux@wanadoo.fr)

Support de cours - v 1.0

3^e partie : "Filtrage"

Sommaire

IV) Filtrage.....	3
IV.1) Généralités.....	3
IV.1.1) Types.....	3
IV.1.2) Fonctions de transfert.....	3
a) Transmittance de Laplace.....	3
b) Fonction de transfert harmonique.....	4
c) Décomposition des fonctions de transfert.....	4
IV.1.3) Stabilité.....	4
IV.1.4) Diagrammes de Bode.....	5
IV.1.5) Retard de phase, retard de groupe.....	6
IV.2) Filtrage analogique.....	6
IV.2.1) Principaux types de filtres.....	6
a) Cellules élémentaires.....	7
b) Filtre de Butterworth.....	9
b.1) Définition.....	9
b.2) Recherche des pôles.....	10
b.3) Détermination des coefficients d'un filtre à partir d'un gabarit.....	11
c) Filtre de Tchebyscheff.....	16
d) Filtre de Bessel.....	17
e) Filtre elliptique (ou de Cauer).....	17
f) Comparaison des caractéristiques.....	18
IV.2.2) Forme générale des filtres.....	18
a) Expression.....	18
b) Calcul des autres types de filtres à partir du filtre passe-bas.....	19
IV.2.3) Réalisations.....	19
a) Filtres passifs.....	19
b) Filtres actifs.....	20
c) Critères de choix.....	21
IV.3) Filtrage numérique.....	21
IV.3.1) Transformée en z.....	21
a) Définitions.....	21
b) Domaine de convergence.....	22
c) Rappels sur les suites numériques.....	23
d) Transformée en z des signaux élémentaires.....	24
e) Propriétés.....	25
f) Transformée en Z inverse.....	27
f.1) Division de polynômes.....	27
f.2) Décomposition en éléments simples.....	27
f.3) Méthode des résidus.....	28
g) Equation aux différences.....	28
h) Exemple de programmation avec Scilab.....	30
IV.3.2) Synthèse des filtres.....	30
IV.3.2.1) Synthèse des filtres RII.....	30
a) Transformations analogique vers numérique.....	30
a.1) Méthode de l'invariance impulsionnelle.....	31
a.2) Equivalence de la dérivation.....	32
a.3) Equivalence de l'intégration : transformée bilinéaire.....	34
b) Forme générale de la fonction de transfert des filtres du 1 ^{er} et 2 nd ordre(s).....	36
IV.3.2.2) Synthèse des filtres RIF.....	38
a) Généralités.....	38
b) Synthèse par développement en séries de Fourier et fenêtrage.....	39
c) Synthèse par transformée de Fourier discrète inverse (TFD ⁻¹).....	42
IV.3.2.3) Comparaison des propriétés des filtres RII et RIF.....	43
a) Filtres RII.....	43
b) Filtres RIF.....	44

IV) Filtrage

L'objectif du filtrage est de modifier le spectre de fréquence des signaux pour éliminer ou renforcer certaines gammes ou bandes de fréquences.

Les filtres sont des systèmes linéaires, caractérisés par des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Ils peuvent être étudiés par leur transmittance de Laplace, pour ce qui est de leur comportement temporel (réponse impulsionnelle, réponse indicielle...), ou par leur fonction de transfert harmonique, pour ce qui est de leur comportement en fréquence.

Les applications des filtres dans le monde actuel sont très nombreuses : communications (pour le démultiplexage des signaux, entre autres), électroacoustique, etc.

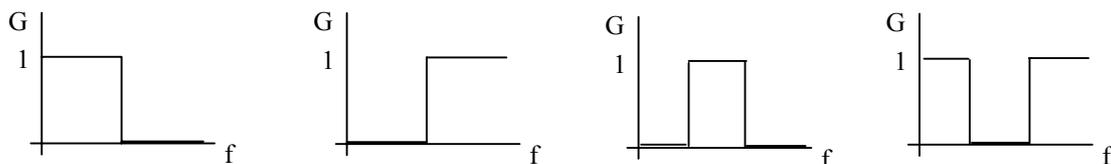
La tendance est aujourd'hui au filtrage numérique, plus précis et plus reproductible, sauf dans certains domaines comme l'instrumentation, l'électronique de puissance, l'électroacoustique, les systèmes haute-fréquence.

IV.1) Généralités

IV.1.1) Types

Les grands types de filtres sont : passe-bas, passe-haut, passe-bande, coupe-bande (ou réjecteur de bande). Il existe également d'autres filtres qui ne modifient pas le gain mais uniquement la phase. Ils sont appelés déphaseurs purs.

Les caractéristiques fréquentielles des différents types de filtres sont données sur la figure ci-dessous, où G représente le module du rapport $S(p)/E(p)$ ou $S(j\omega)/E(j\omega)$, ce qui représente le rapport des amplitudes des signaux d'entrée et de sortie, indépendamment de leur phase respective.



Représentation des fonctions de transfert harmonique (en fonction de la fréquence) des 4 types de filtres idéaux.

D'un point de vue idéal, la phase doit être la plus linéaire possible sur la ou les bande(s) passante(s). En effet, une phase non-linéaire se traduit par une déformation des signaux.

En pratique, les pentes des variations ne sont jamais infinies, et ce sont elles qui vont en partie caractériser les filtres.

IV.1.2) Fonctions de transfert

a) Transmittance de Laplace

Un filtre possède une transmittance de Laplace du type :

$$H(p) = \frac{\sum_{i=0}^{M-1} a_i p^i}{\sum_{j=0}^{N-1} b_j p^j} \quad \text{avec } M \leq N$$

L'ordre du filtre est le degré du numérateur N .

En général, on met cette transmittance sous la forme :

$$H(p) = k \frac{\sum_{i=0}^{M-1} a_i p^i}{1 + \sum_{j=1}^{N-1} b_j p^j}$$

où k est une constante, appelé gain statique puisqu'il est indépendant de la fréquence.

Comme il a déjà été vu dans la résolution des équations différentielles, cette fraction rationnelle peut être décomposée en une somme de fractions élémentaires. Mais pour l'étude du comportement fréquentiel on effectue plutôt une décomposition en produit de fractions.

Alors que la somme correspondait à la mise en parallèle de filtres élémentaires, le produit correspond à la mise en cascade (également appelée en série).

b) Fonction de transfert harmonique

La fonction de transfert harmonique décrit le comportement entrée-sortie du filtre en régime sinusoïdal. Elle est obtenue en remplaçant p par $j\omega$.

De plus, en général on exprime chacun des termes en p sous la forme

$$j \frac{\omega}{\omega_c}$$

car ω_c représente une pulsation particulière appelée pulsation de coupure. Le gain subit des évolutions particulières aux fréquences de coupure.

c) Décomposition des fonctions de transfert

Un filtre d'ordre quelconque peut se mettre sous la forme de systèmes d'ordre 1 et 2 en série. Les ordres s'additionnent. Par exemple, tout filtre d'ordre 5 peut se décomposer en 2 filtres du 2^e ordre et 1 filtre du 1^{er} ordre.

IV.1.3) Stabilité

Dans le cas général, un filtre défini par sa transmittance de Laplace définie ci-dessus peut-être stable ou instable.

La stabilité d'un système dépend de ses pôles. Si tous ses pôles sont à partie réelle négative, le système est stable. S'il possède au moins un pôle à partie réelle nulle, il est à la limite de la stabilité : il est oscillant, l'oscillation étant sinusoïdale. S'il possède au moins un pôle à partie réelle positive, il est instable.

Ceci peut se vérifier facilement, pour un système du 1^{er} ordre possédant un pôle, défini par :

$$H(p) = \frac{A}{p - p_0}$$

où A est une constante. Sa transformée inverse est la réponse impulsionnelle du système, et elle est définie par une exponentielle :

$$h(t) = Ae^{p_0 t}$$

Donc le système est stable si sa réponse impulsionnelle est finie, c'est à dire si elle tend vers 0 quand t tend vers l'infini. Cela correspond à p_0 négatif (p_0 étant ici réel car il s'agit d'un pôle simple). Or, on a vu qu'une fonction de transfert quelconque pouvait se décomposer en une somme d'éléments simples, c'est à dire de fonctions transferts du 1^{er} ordre (ce qui correspond, du point de vue des systèmes physique, à la mise en parallèle de systèmes du 1^{er} ordre). Il suffit qu'un seul de ces éléments soit instable pour que le système soit instable.

Les cellules du 1^{er} ordre correspondent à des pôles réels. Les cellules du 2^e ordre à des pôles réels ou complexes conjugués. A la limite, elles peuvent être instables. Dans le plan complexe, cette situation correspond à 2 pôles complexes conjugués situés sur l'axe imaginaire.

On a vu qu'un filtre d'ordre quelconque pouvait se mettre sous la forme de systèmes d'ordre 1 et 2 en série. Donc la stabilité d'un filtre d'ordre quelconque peut se ramener à celle de filtres du 1^{er} et du 2^e ordres.

IV.1.4) Diagrammes de Bode

Gain, phase

En général, l'axe des fréquences est logarithmique (de base 10). L'intérêt de ce mode de représentation est de permettre une analyse détaillée à la fois des basses fréquences et des hautes fréquences.

Du fait de l'utilisation du log de base 10, l'écart entre une valeur de fréquence et 10 fois cette fréquence (=une décade) sur cet axe est constant. En effet, si on a :

$$f_2 = 10f_1 \leftrightarrow \log f_2 = \log(10f_1) \leftrightarrow \log f_2 = \log 10 + \log(f_1) \leftrightarrow \log f_2 = 1 + \log(f_1)$$

La décade représente donc l'unité de cet axe.

On utilise également la notion d'octave, qui correspond à un rapport de 2 fréquences égal à 2 (donc à un doublement de la fréquence). Cette notion est utilisée également en musique. Par exemple, le clavier du piano est composé d'octaves : chaque octave est la répétition identique de 12 touches. L'oreille et le cerveau humain possèdent la particularité de percevoir la même évolution de la fréquence lors d'un doublement de fréquence correspondant au passage à la même note de l'octave supérieure (par exemple, le DO d'une octave, puis le DO de l'octave suivante, etc).

On définit un gain, sans unité, par la grandeur complexe :

$$G(j\omega) = \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)}$$

du point de vue de son module et de sa phase. Le module $|G(j\omega)|$ correspond au rapport des amplitudes des 2 signaux, et la phase le déphasage de $S(j\omega)$ par rapport à $E(j\omega)$:

$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$$

En pratique, le module peut s'agir par exemple d'un rapport de deux tensions.

On étudie plus souvent le gain en décibels (dB), donné par

$$G_{dB}(j\omega) = 20 \log |G(j\omega)|$$

La représentation du gain en dB et de la phase est appelée représentation de Bode.

L'intérêt de cette forme de représentation est de permettre d'étudier facilement les filtres composés de filtres élémentaires mis en cascade (=en série). En effet, cette mise en cascade correspond à une multiplication des fonctions de transfert. Or, le log transforme le produit en somme ; il suffit alors d'additionner les représentations de Bode des différents filtres élémentaires pour obtenir celle du filtre résultant.

$$\begin{aligned} T &= T_1 \times T_2 \times \dots \times T_n \\ 20 \log T &= 20 \log(T_1 \times T_2 \times \dots \times T_n) \\ &= 20 \log T_1 + 20 \log T_2 + \dots + 20 \log T_n \end{aligned}$$

De même pour la phase :

$$\begin{aligned} \arg T &= \arg(T_1 \times T_2 \times \dots \times T_n) \\ \arg T &= \arg T_1 + \arg T_2 + \dots + \arg T_n \end{aligned}$$

Pentes du gain

Une des caractéristiques d'un filtre est la pente des variations de son gain en dB. Celle d'un filtre du 1^{er} ordre est -20dB/décade. Celle d'un filtre du 2^e ordre -40dB/décade. Cette pente dépend de l'ordre N du filtre : elle est égale à $N \times 20$ dB/décade. Par exemple, un filtre d'ordre 4 possède une pente de -80dB/décade. Pour un filtre passe-bas, il s'agit de la pente de la décroissance quand $f \rightarrow \infty$. La décroissance est asymptotique à une droite possédant cette pente.

La pente 20dB/decade sert souvent d'unité. On note alors -1 ou $+1$ cette pente, respectivement selon qu'elle est négative ou positive, -2 ou $+2$ les pentes à $-$ ou $+40$ dB/decade, etc.

Fréquences de coupure

Elle correspondent à une diminution du gain en dB de 3, ou multiplication du gain sans unité par $1/\sqrt{2}$. En effet :

$$20 \log|H(j\omega)| = -3$$

$$\log|H(j\omega)| = -\frac{3}{20}$$

$$|H(j\omega)| = 10^{-\frac{3}{20}} = 1/10^{\frac{3}{20}} = 1/\sqrt{2}$$

Bande passante

La bande passante est la plage des fréquences délimitée par la ou les fréquences de coupure.

IV.1.5) Retard de phase, retard de groupe

Un filtre introduit un déphasage sur le signal d'entrée. Ce déphasage est un décalage temporel. Il est compris entre 0 et T, la période du signal.

Le retard de phase est défini par :

$$t_{\phi} = -\frac{\phi(\omega)}{\omega}$$

Il représente le temps correspondant à la phase, pour une fréquence donnée.

Le retard de groupe est défini par :

$$t_g = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega}$$

Il traduit la variation de la phase par rapport à la fréquence. Si la phase n'est pas constante en fonction de la fréquence, cela se traduit par une déformation du signal ; en effet, les composantes harmoniques ne subissent pas toutes le même retard. Si la phase est linéaire, t_g est constant et le signal ne subit pas de déformation. Or, dans de nombreux cas, la phase $\phi(\omega)$ est définie par une fonction arctg, et donc n'est pas linéaire.

Le retard de groupe, également temps de propagation de groupe, correspond au temps mis par l'énergie du signal pour traverser le filtre.

IV.2) Filtrage analogique

Il existe d'autres types de filtres analogiques permettant d'obtenir facilement des ordres supérieurs à 2 : filtres de Butterworth, de Tchebyscheff, filtres elliptiques, etc.

En général, on étudie leur fonction de transfert harmonique, c'est à dire leur comportement en fréquence. On peut également étudier leur stabilité à l'aide de leur transmittance de Laplace.

IV.2.1) Principaux types de filtres

On a vu que tous les filtres pouvait s'écrire sous la forme d'une transmittance de Laplace :

$$H(p) = k \frac{\sum_{i=0}^{M-1} a_i p^i}{1 + \sum_{j=1}^{N-1} b_j p^j}$$

Ils sont donc caractérisés par des pôles (les racines du polynôme du dénominateur) et des zéros (les racines du numérateur). Parmi ceux-ci, on distingue les filtres polynomiaux, qui ne possèdent pas de zéros. Les filtres de Butterworth, Chebyschef, Bessel en font partie. Par contre, les filtres elliptiques ne sont pas des filtres polynomiaux.

a) Cellules élémentaires

Le filtrage analogique est réalisé par des montages à base de résistances, de capacités (composants condensateurs) et d'inductances (composants selfs, ou bobines), ainsi que des composants électroniques dits actifs car ils nécessitent une alimentation en puissance (transistors, amplificateurs opérationnels, autres circuits intégrés...).

Ces filtres sont définis par une fonction de transfert dont la variable est $j\omega$:

$$H(j\omega) = \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)}$$

Cette fonction de transfert est appelée fonction de transfert harmonique et correspond à un signal d'entrée sinusoïdal. Les filtres étant des systèmes linéaires, une entrée sinusoïdale provoque une sortie sinusoïdale.

Passe-bas du 1^{er} ordre

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

Passe-haut du 1^{er} ordre

$$\frac{j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

Passe-bas du 2^e ordre

$$\frac{1}{1 + 2\xi j \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Passe-haut du 2^e ordre

$$\frac{1}{1 + 2\xi j \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Passe-bande du 2^e ordre

$$\frac{2\xi j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2\xi j \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Coupe-bande du 2^e ordre

$$\frac{1 + \left(j \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}{1 + 2\xi j \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}$$

Remarque

On peut écrire ces expressions en faisant apparaître un paramètre Q , appelé facteur de qualité. Par exemple, pour le cas passe-bas :

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{Q} j \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}$$

Le lien entre les 2 formes est :

$$Q = \frac{1}{2\xi}$$

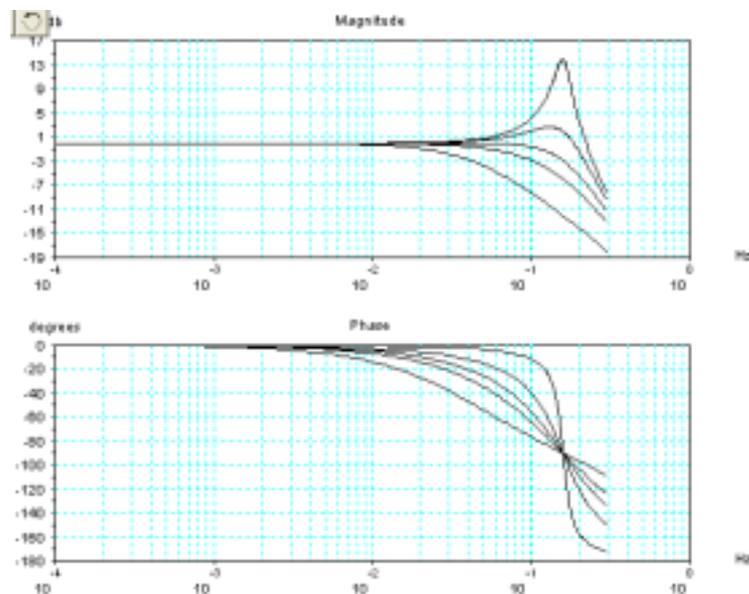
Le facteur de qualité est relié à la bande passante par la relation :

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f}$$

où Δf est la bande passante (voir définition plus haut).

On retrouve ces fonctions de transfert également dans le domaine mécanique.

La figure ci-dessous correspond à la représentation de Bode du filtre passe-bas du 2^e ordre, pour les différentes valeurs du coefficient d'amortissement : $\xi = \{0,2 ; 0,4 ; 0,7 ; 1 ; 2\}$.



Le programme Scilab permettant d'obtenir cette représentation est, pour $\xi=0,1$:

```
num=1;
den=poly([1 0.2 1], "s", "coef");
sys=syslin('c', num, den);
bode(sys, 0.0001, 0.3);
```

Dans le cas du filtre passe-bande, on peut le mettre sous une autre forme normalisée :

$$T(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

$\xi=0$ correspond à la limite de stabilité.

On pourrait penser qu'il existe après des fonctions de transfert élémentaires également pour le 3^e, puis le 4^e ordre, etc. Mais en fait, on peut démontrer que toute fonction de transfert d'ordre supérieur à 2 peut se mettre sous la forme d'un produit de fonction de transfert d'ordre 1 ou 2. L'étude de l'ordre 1 et de l'ordre 2 est donc suffisant pour en déduire le comportement d'un filtre d'ordre quelconque.

Les pentes s'additionnent, ce qui permet d'obtenir des filtres d'ordre élevé. Mais les décroissances du gain à la fréquence de coupure s'additionnent également. Par exemple, la mise en cascade de 2 filtres du 1^{er} ordre, donc de pente -1 , et possédant la même fréquence de coupure, donne une caractéristique de pente -2 et passant par -6dB à la fréquence de coupure. Par contre, avec des cellules du 2^e ordre, on peut avoir des gains plus grands à la fréquence de coupure. Ceci est permis par l'existence de la résonance, et peut donc être réglé par le facteur d'amortissement ξ . Cela permet donc de se rapprocher du diagramme de gain idéal. Du point de vue des pôles, la cellule du 1^{er} ordre correspond à un pôle réel alors que celle du 2^e ordre correspond à 2 pôles complexes conjugués.

Toutes ces fonctions de transfert utilisent le terme

$$j \frac{\omega}{\omega_0}$$

correspondant à un terme de dérivation. En effet, il faut se souvenir que le lien entre la variable du régime harmonique $j\omega$ et celle de Laplace p est :

$$p = j\omega$$

Or, la multiplication par p correspond à une dérivation.

La représentation de Bode de cette fonction de transfert élémentaire donne une droite de pente 20dB/décade (et 6dB par octave) pour le gain et une constante égale à $\pi/2$ pour la phase, et coupant l'axe des fréquences en :

$$\omega = \omega_0$$

Le gain tend vers l'infini pour f tend vers l'infini.

Exemple

Un circuit RLC possède une fonction de transfert passe-bas du 2^e ordre. Elle correspond à l'équation différentielle :

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{ds(t)}{dt} + \omega_0^2 s(t) = e(t)$$

avec

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

b) Filtre de Butterworth

b.1) Définition

Le filtre de Butterworth passe-bas est défini par la fonction de transfert suivante :

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^{2N}}$$

où N est l'ordre du filtre. On peut se limiter à l'étude du cas passe-bas ; les autres types de filtres peuvent ensuite s'en déduire.

On peut montrer que la valeur du gain de ce filtre à la fréquence de coupure est -3dB (et ceci quel que soit l'ordre N). En prenant N=2, on peut démontrer que la pente de la décroissance est égale à 40. Dans le cas général, elle est égale à N×20 dB/décade.

L'avantage par rapport à la mise en cascade de filtres du 1^{er} ordre est donc que le gain est moins affaibli à la fréquence de coupure. Ceci est permis par le fait que les pôles sont complexes. Plus précisément, ils existent par paires et sont complexes conjugués. Par exemple, un filtre de Butterworth d'ordre 4 possède 2 paires de pôles complexes conjugués.

b.2) Recherche des pôles

On montre que

$$|H(\omega)|^2 = H(j\omega)H(-j\omega)$$

En remplaçant p par jω, on a donc :

$$H(p).H(-p) = \frac{1}{1 + (-1)^N \left(\frac{p}{\omega_c}\right)^{2N}}$$

Pour rechercher les pôles de cette fonction, on cherche pour quelles valeurs le dénominateur s'annule :

$$1 + (-1)^N \left(\frac{p}{\omega_c}\right)^{2N} = 0$$

$$1 + e^{-j\pi N} \left(\frac{p}{\omega_c}\right)^{2N} = 0$$

$$e^{-j\pi N} \left(\frac{p}{\omega_c}\right)^{2N} = -1 = e^{j\pi + 2n\pi} \text{ avec } 0 \leq n \leq 2N - 1$$

$$\left(\frac{p}{\omega_c}\right)^{2N} = e^{j(N+1+2n)\pi}$$

$$\frac{p}{\omega_c} = e^{j\frac{(N+1+2n)\pi}{2N}}$$

Le dénominateur de cette fraction s'annule donc pour les valeurs de p :

$$p_n = \omega_c e^{j\frac{N+1+2n}{2N}\pi}, \text{ avec } 0 \leq n \leq 2N - 1$$

On peut les écrire également sous la forme :

$$p_n = \omega_c \left(\cos\left(\frac{N+1+2n}{2N}\pi\right) + j\sin\left(\frac{N+1+2n}{2N}\pi\right) \right) = \omega_c \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1+2n}{2N}\pi\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1+2n}{2N}\pi\right) \right)$$

$$p_n = \omega_c \left(-\sin\left(\frac{2n+1}{2N}\pi\right) + j\cos\left(\frac{2n+1}{2N}\pi\right) \right)$$

Cette fonction présente donc 2N pôles. Les pôles correspondant à $0 \leq n \leq N - 1$ sont situés à gauche du plan complexe (ils sont à partie réelle négative), donc ils correspondent à un système stable. Les autres pôles correspondent à H(-p).

On peut démontrer que la transmittance de Laplace de ces filtres peut se mettre sous la forme :

$$H(p) = \prod_{n=0}^{N-1} \frac{-p_n}{p - p_n}$$

La particularité de ce filtre est de ne pas présenter d'oscillations.

Remarque : utilisation d'une variable réduite

Pour simplifier les expressions, on utilise souvent une variable de Laplace réduite :

$$s = \frac{p}{\omega_c}$$

Dans la représentation de Bode, la variable réduite s est alors égale à 1 à la pulsation de coupure ω_c .

Exemple de programmation

La fonction de transfert ci-dessous correspond à un filtre passe-bas de Butterworth avec fréquence de coupure égale à 100Hz et d'ordre 4.

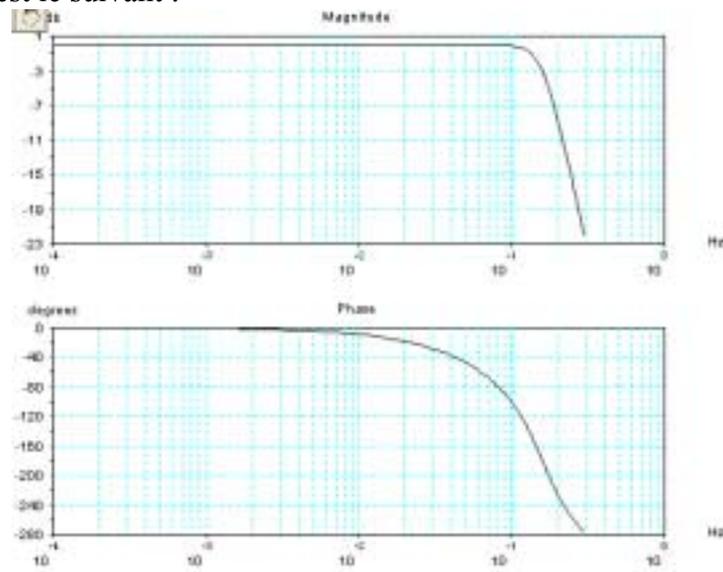
Pour tracer le diagramme de Bode du filtre de l'exercice ci-dessus avec Scilab, il est plus simple de développer le dénominateur. En utilisant la variable réduite $s=p/\omega_c$ pour simplifier, le calcul donne :

$$H(p) = \frac{1}{p^4 + 2,6131p^3 + 3,4142p^2 + 2,6131p + 1}$$

Le petit programme Scilab ci-dessous permet de programmer un filtre passe-bas de Butterworth en variable réduite, donc de pulsation de coupure $\omega_c=1$ (soit $f_c=1/2\pi \approx 0,16\text{Hz}$).

```
num=1;
den=poly([1 2.6131 3.4142 2.6131 1], "s", "coef");
sys=syslin('c', num, den)
bode(sys, 0.0001, 0.3);
```

L'affichage obtenu est le suivant :



b.3) Détermination des coefficients d'un filtre à partir d'un gabarit

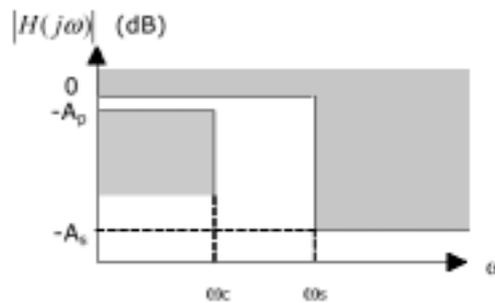
Gabarit sur le diagramme du gain en dB

Dans ce qui a été fait précédemment, on a déterminé l'expression d'un filtre en fonction d'une fréquence de coupure à -3dB et d'une pente donnée. Cette détermination est directe, dans la mesure où la fréquence de coupure apparaît explicitement dans la fonction de transfert, et que la pente est directement reliée à l'ordre du filtre.

Mais on peut vouloir imposer des caractéristiques plus contraignantes, à savoir des bandes de fréquences dans lesquelles le gain du filtre est compris dans des plages de valeurs précises. Il s'agit de la bande passante et de la bande dite atténuée, rejetée ou bloquée. On parle alors de détermination par

rapport à un gabarit, ou sur cahier des charges. Ces spécifications s'effectuent par rapport à la représentation du gain (en dB donc).

Par exemple, dans le cas passe-bas, on va imposer que la courbe de gain reste comprise dans la zone blanche dans la figure ci-dessous.



On définit donc une atténuation maximale de A_p dans la bande passante (correspondant donc à un gain de $-A_p$), définie ici par l'intervalle $[0, \omega_c]$ et une atténuation minimale $-A_s$ (s pour stop-bande) dans la bande bloquée définie ici par $[\omega_s, +\infty[$.

Remarques :

- Il ne s'agit plus de la fréquence de coupure à -3dB , mais d'une fréquence pour laquelle on va imposer le gain (par exemple, -1dB) ;
- Dans le cas d'un filtre passe-haut, il suffit d'inverser ces spécifications.
- Dans le cas d'un filtre passe-bande, on définit 2 pulsations d'atténuation : ω_{a+} et ω_{a-} . On peut définir ce dernier symétrique (sur le repère semi-logarithmique) ou non. Pour un filtre coupe-bande, on inverse les spécifications du passe-bande.

Pour la détermination des paramètres des filtres par gabarit, on utilise une autre expression de la fonction de transfert du filtre avec un paramètre supplémentaire ϵ , et on fait apparaître la pulsation ω_a correspondant à l'atténuation A_p :

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_a}\right)^{2N}}, \quad 0 \leq \epsilon \leq 1$$

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_a}\right)^{2N}}}$$

Pour simplifier les notations, on utilise souvent la pulsation réduite :

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_a} \rightarrow |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 \Omega^{2N}}}$$

L'amortissement maximal dans la bande passante A_p est obtenu pour $\omega = \omega_a$, donc pour $\Omega = 1$.

Il s'agit donc de déterminer les 3 paramètres du filtre : son ordre N , son paramètre ϵ et (éventuellement) sa fréquence de coupure f_c à -3dB .

Détermination du paramètre ϵ

On a :

$$20 \log |H(\omega)| = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 \Omega^{2N}}} = -20 \log \sqrt{1 + \epsilon^2 \Omega^{2N}} = -10 \log (1 + \epsilon^2 \Omega^{2N})$$

Pour $f = f_a$, c'est à dire pour $\Omega = 1$, on a :

$$20 \log |H(\omega)| = -A_p$$

soit

$$\begin{aligned} -10 \log(1 + \varepsilon^2) &= -A_p \\ 10 \log(1 + \varepsilon^2) &= A_p \end{aligned}$$

On cherche à exprimer ε en fonction de A_p :

$$\begin{aligned} \log(1 + \varepsilon^2) &= \frac{A_p}{10} \\ 1 + \varepsilon^2 &= 10^{\frac{A_p}{10}} \\ \varepsilon &= \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1} \end{aligned}$$

Détermination de l'ordre du filtre

Pour l'affaiblissement dans la bande coupée, on utilise le même principe :

$$20 \log|H(\omega)| = -10 \log(1 + \varepsilon^2 \Omega_r^{2N}) = -A_s$$

où Ω_r est la pulsation réduite d'atténuation en bande coupée, définie par :

$$\begin{aligned} \Omega_r &= \frac{\omega_r}{\omega_a} \\ 10 \log(1 + \varepsilon^2 \Omega_r^{2N}) &= A_s \\ \varepsilon \Omega_r^N &= \sqrt{10^{\frac{A_s}{10}} - 1} \\ \Omega_r^N &= \frac{\sqrt{10^{\frac{A_s}{10}} - 1}}{\varepsilon} \end{aligned}$$

$$\log(\Omega_r^N) = \log \frac{\sqrt{10^{\frac{A_s}{10}} - 1}}{\varepsilon} = \log \sqrt{10^{\frac{A_s}{10}} - 1} - \log \varepsilon = \frac{1}{2} \log \left(10^{\frac{A_s}{10}} - 1 \right) - \log \varepsilon$$

$$N \log \Omega_r = \frac{1}{2} \log \left(10^{\frac{A_s}{10}} - 1 \right) - \log \varepsilon$$

$$N = \frac{\frac{1}{2} \log \left(10^{\frac{A_s}{10}} - 1 \right) - \log \varepsilon}{\log \Omega_r}$$

$$N = \frac{\log \left(10^{\frac{A_s}{10}} - 1 \right) - 2 \log \varepsilon}{2 \log \Omega_r}$$

La valeur obtenue peut être fractionnaire. Dans ce cas on arrondit à l'entier supérieur.

Détermination de la fréquence de coupure à $-3dB$

La fréquence de coupure à $-3dB$ est telle que :

$$\begin{aligned} 20 \log|H(\omega)| &= -3 \\ -10 \log(1 + \varepsilon^2 \Omega_c^{2N}) &= -3 \\ \log(1 + \varepsilon^2 \Omega_c^{2N}) &= \frac{3}{10} \\ 1 + \varepsilon^2 \Omega_c^{2N} &= 10^{\frac{3}{10}} = 2 \end{aligned}$$

$$\varepsilon^2 \Omega_c^{2N} = 1$$

$$\Omega_c^{2N} = \frac{1}{\varepsilon^2}$$

$$\Omega_c^N = \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Omega_c = \sqrt[N]{\frac{1}{\varepsilon}}$$

Or cette pulsation est réduite ; elle est définie par :

$$\Omega_c = \frac{\omega_c}{\omega_a}$$

où ω_a est la pulsation de coupure définie pour le gain atténué $-A_p$. La pulsation de coupure à -3dB est donc donnée par la relation :

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt[N]{\varepsilon}} \omega_a \quad \text{ou} \quad f_c = \frac{1}{\sqrt[N]{\varepsilon}} f_a$$

Pour résumer, les paramètres du filtre de Butterworth dont la fonction de transfert est définie par :

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_a}\right)^{2N}}}$$

sont obtenus en fonction des paramètres du gabarit déterminé par les relations :

$$\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}, \quad N = \frac{\log\left(10^{\frac{A_p}{10}} - 1\right) - 2 \log \varepsilon}{2 \log \Omega_r}, \quad f_c = \frac{1}{\sqrt[N]{\varepsilon}} f_a$$

Exemple

On souhaite déterminer la fonction de transfert d'un filtre dont le gain est atténué de 1dB à la fréquence $f_a=1\text{kHz}$ et de 50dB à $f_r=5\text{kHz}$. Cela revient à déterminer les paramètres ε et l'ordre du filtre N . On obtient :

$$\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1} = \sqrt{10^{\frac{1}{10}} - 1} = 0,509$$

Pour l'ordre du filtre N , on a besoin de connaître la pulsation réduite d'atténuation en bande coupée Ω_r . Elle est définie par :

$$\Omega_r = \frac{\omega_r}{\omega_a} = \frac{f_r}{f_a} = \frac{5\text{kHz}}{1\text{kHz}} = 5$$

d'où

$$N = \frac{\log\left(10^{\frac{A_p}{10}} - 1\right) - 2 \log \varepsilon}{2 \log \Omega_r} = \frac{\log\left(10^{\frac{50}{10}} - 1\right) - 2 \log 0,509}{2 \log 5} = 3,99 \quad \text{donc } N=4$$

La fonction de transfert est donc définie par :

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_a}\right)^{2N}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,259 \left(\frac{\omega}{\omega_a}\right)^8}}$$

On peut également faire apparaître la première forme de la fonction de transfert du filtre, avec la pulsation de coupure à -3dB . Pour cela, on calcule la pulsation de coupure à l'aide de la relation :

$$\omega_c = \sqrt[N]{\frac{1}{\varepsilon}} \omega_a \quad \leftrightarrow \quad \omega_a = \sqrt[N]{\varepsilon} \omega_c = (\varepsilon)^{\frac{1}{N}} \omega_c = (0,259)^{\frac{1}{4}} \omega_c = 0,71 \omega_c$$

$$f_c = \frac{1}{\sqrt[N]{\varepsilon}} f_a = \sqrt[4]{\frac{1}{0,509}} 1000 = 1184 \text{ Hz}$$

Gabarit sur le spectre de puissance

En considérant le carré de la fonction de transfert :

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^{2N}}$$

on peut remarquer que pour $\omega = \omega_c$, c'est à dire à la fréquence de coupure, on a :

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2}$$

En fixant une condition sur le spectre de puissance, on peut donc en déduire directement le paramètre ε .

De même, pour $\omega = \omega_s$, on peut imposer que la fonction soit égale à une certaine ordonnée, que l'on peut écrire sous la forme :

$$\frac{1}{1 + \lambda^2}$$

et ceci pour faciliter le calcul. La condition s'écrit alors :

$$\frac{1}{1 + \lambda^2} \geq \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\omega_s}{\omega_c} \right)^{2N}}$$

Elle permet d'en déduire l'ordre du filtre minimum pour satisfaire cette condition :

$$N \geq \frac{\log(\lambda / \varepsilon)}{\log(\omega_s / \omega_c)}$$

Exemple

On souhaite déterminer la fonction de transfert d'un filtre dont le gain est égal de 0,9 pour la pulsation $\omega_a = 10 \text{ rad/s}$ et 0,05 pour la pulsation $\omega_s = 20 \text{ rad/s}$.

On a :

$$\frac{1}{1 + \varepsilon^2} = 0,9 \quad \rightarrow \quad \varepsilon = 0,3333$$

$$\frac{1}{1 + \lambda^2} = 0,05 \quad \rightarrow \quad \lambda = 4,358$$

L'ordre du filtre doit être tel que :

$$N \geq \frac{\log(\lambda / \varepsilon)}{\log(\omega_s / \omega_c)} = 3,7 \quad \rightarrow \quad N = 4$$

La pulsation de coupure est définie par :

$$\omega_c = \sqrt[N]{\frac{1}{\varepsilon}} \omega_a = \left(\frac{10}{0,333} \right)^{\frac{1}{4}} = 13,16 \text{ rad/s}$$

Les pôles sont définis par :

$$p_n = \omega_c \left(-\sin\left(\frac{2n+1}{8}\pi\right) + j \cos\left(\frac{2n+1}{8}\pi\right) \right), n=0, \dots, 3$$

soit

$$p_0 = \omega_c \left(-\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) + j \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \right) = -0,09 + 13,16j = p_3^*$$

$$p_1 = \omega_c \left(-\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) + j \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \right) = -0,27 + 13,16j = p_2^*$$

On regroupe les pôles conjugués pour obtenir la fonction de transfert ;

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{(-p_0)(-p_1)(-p_2)(-p_3)}{(p-p_0)(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)} = \frac{|p_0|^2}{p^2 - 2p \operatorname{Re}(p_0) + p_0 p_0^*} \cdot \frac{|p_1|^2}{p^2 - 2p \operatorname{Re}(p_1) + p_1 p_1^*} \\ &= \frac{173,19}{p^2 + 0,18p + 173,19} \cdot \frac{173,19}{p^2 - 0,54p + 173,19} \end{aligned}$$

c) Filtre de Tchebyscheff

Il existe le type I et le type II. Les filtres de type I sont définis par :

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_a}\right)} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\Omega)}$$

où ε est un réel inférieur à 1. Comme pour le filtre de Butterworth, ω_a est la pulsation reliée à la pulsation de coupure à -3dB ω_c par la relation :

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt[N]{\varepsilon}} \omega_a$$

$T_N(\cdot)$ désigne un polynôme d'ordre N défini de façon récursive :

$$T_0(\omega) = 1$$

$$T_1(\omega) = \omega$$

$$T_2(\omega) = 2\omega^2 - 1$$

$$T_3(\omega) = 4\omega^3 - 3\omega$$

...

$$T_N(\omega) = 2\omega T_{N-1}(\omega) - T_{N-2}(\omega)$$

Les paramètres se déterminent de manière analogue au cas des filtres de Butterworth. Soit A_p l'atténuation du gain à la pulsation ω_a . Comme dans le cas de Butterworth, le paramètre ε est donné par la relation :

$$\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}$$

Les pôles de la fonction de transfert sont définis par :

$$s_k = \sin(\alpha_k) \operatorname{sh}(\beta) + j \cos(\alpha_k) \operatorname{ch}(\beta), \text{ avec } 0 \leq k \leq 2N-1$$

avec

$$\alpha_k = \frac{\pi}{2N} + k \frac{\pi}{N} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{N} \operatorname{arg sh} \frac{1}{\varepsilon}$$

Ils sont situés sur une ellipse centrée sur l'origine du plan complexe, et sont conjugués 2 à 2. On ne retient que les pôles à partie réelle négative.

On peut montrer que l'ordre du filtre est donné par :

$$N = \frac{\operatorname{arccosh} \sqrt{10^{\frac{A_s}{10}} - 1}}{\operatorname{arccosh}(\Omega_s)}$$

et la fréquence de coupure à -3dB par :

$$\Omega_c = \cosh\left(\frac{1}{N} \operatorname{arccosh}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)$$

Les caractéristiques de ces filtres sont :

- la présence d'oscillations dans la bande passante, dont la fréquence augmente avec l'ordre du filtre ;
- une atténuation asymptotique de $20N \text{ dB/décade}$ (comme Butterworth) ;
- un module de la fonction de transfert inférieur à 1 pour $0 \leq \omega \leq \omega_c$; il est tel que :

$$\frac{1}{1 + \epsilon^2} \leq |H(\omega)|^2 \leq 1$$

Les filtres de type II présentent une oscillation non plus dans la bande passante mais dans la bande coupée. Ils sont définis par :

$$|H(\omega)|^2 = \frac{\epsilon^2 T_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}{1 + \epsilon^2 T_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}$$

d) Filtre de Bessel

Ce filtre est de type polynômial, comme les filtres de Butterworth et Tchebyscheff. Sa fonction de transfert est définie par :

$$H(p) = \frac{b_0}{\sum_{i=0}^N b_i \cdot p^i} = \frac{b_0}{b_0 + \sum_{i=1}^N b_i \cdot p^i} = \frac{1}{1 + \frac{1}{b_0} \sum_{i=1}^N b_i \cdot p^i}$$

avec

$$b_i = \frac{(2N-1)!}{2^{N-1} i! \dots (N-i)!}$$

et où N est l'ordre du filtre.

Ils sont conçus pour rendre la phase la plus linéaire possible. Ils sont basés sur le fait que les n dérivées premières du temps de propagation de groupe sont imposées nulles pour $f=0$ (ce qui implique donc une phase linéaire).

Il n'existe pas de méthode analytique pour permettre de déterminer les coefficients b_i en fonction d'un gabarit. Ces coefficients sont obtenus par approximations successives, par des méthodes graphiques ou par des algorithmes numériques ; dans ce dernier cas, on utilise des logiciels spécialisés.

e) Filtre elliptique (ou de Cauer)

Contrairement à tous les filtres présentés ci-dessus, les filtres elliptiques ne sont pas polynomiaux (voir plus bas : "Forme générale des filtres"). Leur fonction de transfert est de la forme :

$$H(p) = \frac{1}{1 + C(F^2)}$$

avec

$$C(F^2) = \prod_{i=1}^{n/2} \frac{F^2 - F_i^2}{F^2 - F_{i,\infty}^2}$$

Le dénominateur de ce polynôme fait apparaître des zéros dans la fonction de transfert du filtre. Ils sont appelés zéros de transmission, et ont la propriété d'éliminer les fréquences correspondantes.

Les filtre elliptiques sont caractérisés par des oscillations à la fois dans la bande passante et dans la bande coupée. Ils permettent d'obtenir une décroissance plus rapide que les 2 types précédents, avec un ordre inférieur. Ceci au détriment d'une complexité plus grande de conception. Ses coefficients peuvent être déterminés par des méthodes numériques.

f) Comparaison des caractéristiques

Du point de vue de la difficulté de conception, on trouve d'abord les filtres de Butterworth, puis les filtres de Tchebyscheff et enfin les filtres elliptiques.

Du point de vue de la raideur des pentes avec des ondulations limitées, on trouve les filtres elliptiques, puis ceux de Tchebyscheff et enfin ceux de Butterworth.

Les filtres de Bessel sont ceux qui ont la phase la plus linéaire, mais leurs pentes ne sont pas très raides.

Les filtres elliptiques permettent les pentes les plus raides pour un ordre donné, mais comportent des oscillation dans la réponse en fréquence.

Le tableau suivant résume ces caractéristiques.

Types	Critère
Butterworth	Réponse en amplitude plate jusqu'à la fréquence de coupure
Tchebycheff	Meilleur affaiblissement après la coupure ; légère oscillation dans la bande passante ; distorsion de phase assez grande
Bessel	Distorsion de phase très faible
Elliptique	Affaiblissement maximal après la coupure ; distorsion de phase importante

Si le critère de choix est l'ordre du filtre, que l'on recherche le plus faible possible (par exemple pour des raisons de coût de calcul), on choisira le filtre possédant la pente la plus raide pour un ordre donné. Par exemple, pour satisfaire le gabarit suivant :

$$-1\text{dB pour } F=1(=f/f_c) \text{ et } -50\text{dB pour } 1,67$$

on obtient les ordres suivants pour 3 types de filtres :

Butterworth : 11

Tschebycheff : 6

Cauer : 4

IV.2.2) Forme générale des filtres

a) Expression

Les filtres étudiés jusqu'à maintenant peuvent se diviser en 2 catégories : les filtres polynomiaux et les filtres non-polynomiaux. Les premiers possèdent un polynôme au dénominateur :

$$H(p) = \frac{1}{D(p)}$$

où $D(p)$ est un polynôme en p . Les seconds possèdent un polynôme au dénominateur et au numérateur :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Ils possèdent des pôles et des zéros. C'est le cas des filtres appelés elliptiques. Les zéros ont pour effet d'éliminer une ou plusieurs fréquences particulières. Ils sont appelés zéros de transmission. En les choisissant judicieusement, ils permettent de rendre la ou les pente(s) de variation du gain plus raide(s).

b) Calcul des autres types de filtres à partir du filtre passe-bas

L'étude des filtres passe-bas permet de déduire n'importe quel autre type de filtre, en effectuant une transformation de fréquence. Soit s la variable de Laplace réduite, définie par :

$$s = \frac{p}{\omega_c} = j \frac{\omega}{\omega_c} = j\omega'$$

avec ω_c la pulsation de coupure et $\omega' = \frac{\omega}{\omega_c}$ la pulsation réduite (en pulsation réduite, la valeur de coupure est égale à 1).

Pour passer d'un passe-bas aux autres types de filtres, on effectue les transformations suivantes :

- filtre passe-haut

$$s \rightarrow \frac{1}{s}$$

- passe-bande

$$s \rightarrow \frac{1}{B} \left(s + \frac{1}{s} \right)$$

avec

$$B = \frac{f_{c_2} - f_{c_1}}{f_0}$$

la bande passante, et f_0 la fréquence centrale du filtre.

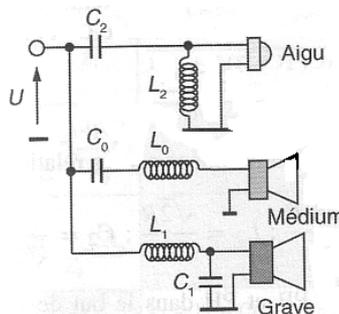
- coupe-bande

$$s \rightarrow B \left(s + \frac{1}{s} \right)^{-1}$$

IV.2.3) Réalisations

a) Filtres passifs

Les filtres passifs sont réalisés à partir de composants R (résistances), L (selfs, ou bobines), C (condensateurs). Ils sont utilisés par exemple dans les enceintes acoustiques. Par exemple, dans le cas d'une enceinte à 3 voies dont le schéma est :



l'impédance de chacun des haut-parleurs est assimilable à une résistance R. Les tensions aux bornes de chacun des hauts-parleurs sont données par les relations :

-pour les graves :

$$\frac{v_g}{u} = \frac{1}{1 + 2\xi_1 \frac{p}{\omega_1} + \left(\frac{p}{\omega_1} \right)^2} \quad \text{avec} \quad \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \quad \text{et} \quad \xi_1 = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$$

-pour les médium :

$$\frac{v_m}{u} = \frac{2\xi_0 \frac{p}{\omega_0}}{1 + 2\xi_0 \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2} \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \quad \text{et} \quad \xi_0 = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{C_0}{L_0}}$$

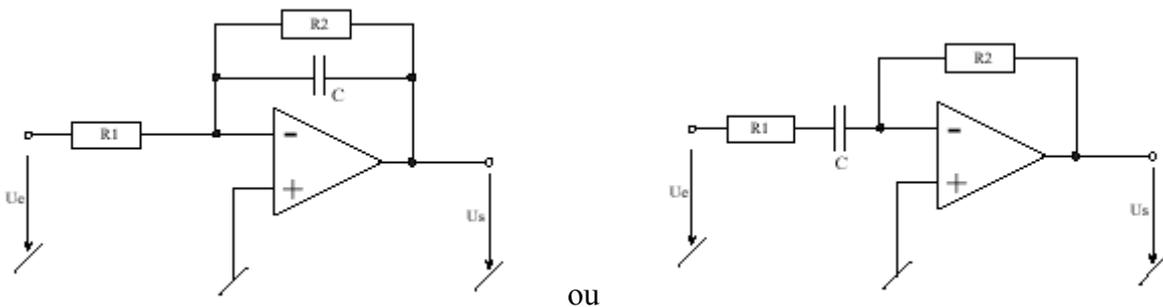
-pour les aigus :

$$\frac{v_a}{u} = \frac{\left(\frac{p}{\omega_2}\right)^2}{1 + 2\xi_2 \frac{p}{\omega_2} + \left(\frac{p}{\omega_2}\right)^2} \text{ avec } \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} \quad \text{et} \quad \xi_2 = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L_2}{C_2}}$$

On choisit les pulsations de coupure ω_i , $i=1,2,3$ de façon à ce que la somme des spectres d'amplitude soit la plus plate possible, dans le but que toutes les fréquences se trouvent restituées avec la même puissance sonore. On choisit ensuite les valeurs de composants adéquates.

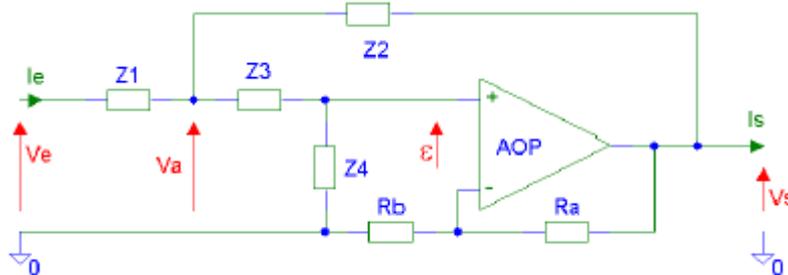
b) Filtres actifs

Les filtres actifs sont basés sur l'utilisation d'amplificateurs opérationnels. Ces derniers se présentent sous la forme de circuits intégrés. Il existe plusieurs structures de base permettant d'obtenir des cellules du 1^{er} ou du 2^e ordre. Pour le 1^{er} ordre, on peut utiliser les 2 cellules suivantes :



ou

Pour le 2^e ordre, il existe (entre autres) la cellule dite de Sallen-Key :

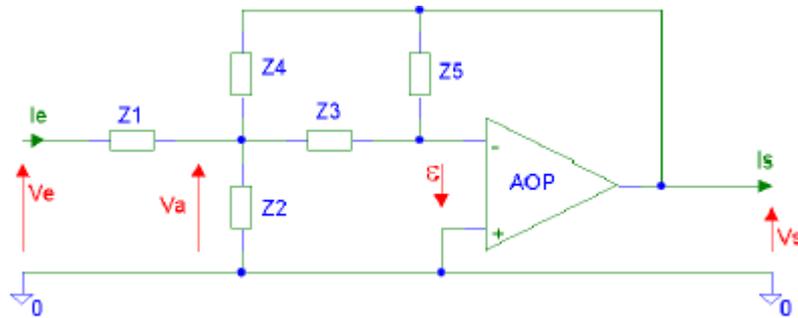


Les éléments d'impédance Z_i sont remplacés par des condensateurs d'impédance $1/jC_i\omega$, ou des résistances d'impédance R_i .

La fonction de transfert de cette cellule est :

$$H = \frac{V_s}{V_e} = \frac{kZ_2Z_4}{Z_1Z_4(1-k) + Z_1(Z_2 + Z_3) + Z_2(Z_3 + Z_4)}$$

Il existe également la structure de Rauch :



de fonction de transfert :

$$H = \frac{V_s}{V_e} = \frac{-Y_1 Y_3}{Y_1 Y_5 + Y_2 Y_5 + Y_3 Y_4 + Y_3 Y_5 + Y_4 Y_5}$$

Il permettent tous les 2 d'obtenir des filtres passe-bas, passe-bande et passe-haut.

Comme pour tous les quadripôles électroniques, il faut prendre en compte leur impédance d'entrée et de sortie lors de leur raccordement en cascade.

c) Critères de choix

Voici résumés les principaux avantages et inconvénients des filtres passifs et des filtres actifs.

Filtres passifs

Inconvénients : nécessitent parfois des composants volumineux (condensateurs et bobines)...

Avantages : passifs, donc ne nécessitent pas d'alimentation (exemple : enceintes acoustiques)...

Filtres actifs

Inconvénients : nécessitent une alimentation ; bande passante limitée donc limitation aux fréquences (relativement) basses ; sensibles à leurs composants passifs (condensateurs et résistances) ; produisent du bruit ; limités en tension...

Avantages : permettent une intégration à grande échelle (et notamment dans les processeurs), fiables, coût de production réduit, moins de parasites...

IV.3) Filtrage numérique

IV.3.1) Transformée en z

La transformée en z est la transformée de Laplace des signaux discrets. Elle constitue un outil d'étude des signaux discrets, provenant de l'échantillonnage d'un signal continu ou non.

a) Définitions

Rappels :

- La transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac est définie par :

$$\delta(t) \xrightarrow{L} 1$$

- La transformée de Laplace d'une impulsion de Dirac retardée de t_0 est définie par :

$$\delta(t - t_0) \xrightarrow{L} e^{-t_0 p}$$

- La transformée de Laplace d'un signal retardé de t_0 est définie par :

$$s(t - t_0) \xrightarrow{L} e^{-t_0 p} L(s(t))$$

- Un signal échantillonné avec la période d'échantillonnage T_e peut se mettre sous la forme :

$$s_e(t) = s(t) \times \delta_{T_e}(t) = s(t) \times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_e) \delta(t - nT_e)$$

La transformée de Laplace d'un signal échantillonné est donc (en considérant le signal causal) :

$$S_e(p) = \sum_{n=0}^{\infty} s(nT_e) e^{-nT_e p}$$

On peut poser

$$z = e^{T_e p}$$

pour simplifier. La nouvelle variable est alors z :

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} s(nT_e) z^{-n}$$

La variable de Laplace p étant complexe, la variable z l'est également. On appelle cette transformation "transformée en z " (TZ).

On peut considérer le signal échantillonné comme un signal discret, c'est à dire composé de valeurs discrètes, indépendamment de la fréquence d'échantillonnage à laquelle elles ont été prélevées :

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} s(n) z^{-n}$$

Jusqu'ici, le signal a été considéré causal et la TZ est mono-latérale. On peut définir également la TZ bilatérale :

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) z^{-n}$$

b) Domaine de convergence

Le domaine de convergence définit les conditions d'existence de la TZ.

La définition de la TZ est celle d'une série de puissance. Le critère de convergence d'une telle suite, définie par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

est appelé critère de Cauchy :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} < 1$$

L'application de ce critère à la TZ donne :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |s(n) z^{-n}|^{\frac{1}{n}} < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |s(n)|^{\frac{1}{n}} |z^{-1}| < 1$$

$$R_{\text{int}} |z^{-1}| < 1$$

$$|z| > R_{\text{int}}$$

avec

$$r_{\text{int}} = \lim_{n \rightarrow \infty} |s(n)|^{\frac{1}{n}}$$

La TZ converge donc pour $|z| > R_{\text{int}}$ pourvu que R_{int} soit fini. R_{int} est le rayon d'un cercle centré sur 0.

Dans le cas bilatéral, on peut décomposer la somme en 2 sommes partielles :

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} s(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} s(n)z^{-n}$$

Le cas de la 2^e somme vient d'être traité. Pour la 1^{ère}, on a :

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} s(n)z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} s(-n)z^n$$

Cette série converge si :

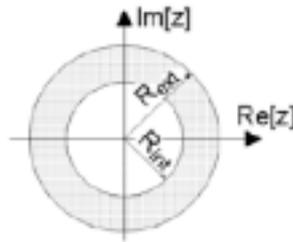
$$\lim_{n \rightarrow \infty} |s(-n)|^{\frac{1}{n}} |z| < 1$$

$$|z| < R_{\text{ext}}$$

avec

$$R_{\text{ext}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} |s(-n)|^{\frac{1}{n}}}$$

Pour autant que $R_{\text{ext}} \neq 0$, la série converge pour z à l'intérieur d'un cercle de rayon R_{ext} . Finalement, la série converge pour z compris dans un anneau de rayon intérieur R_{int} et de rayon extérieur R_{ext} .



c) Rappels sur les suites numériques

Suites géométriques

Une suite définie par une somme infinie :

$$S_{\infty} = u_0 + u_1 + u_2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

avec

$$u_{n+1} = r \cdot u_n$$

est une suite géométrique de raison r .

La somme des $N+1$ premiers termes (que l'on note S_N pour désigner le fait qu'il s'agit de la somme des termes jusqu'à S_N compris) est égale à (si $r \neq 1$) :

$$S_N = u_0 \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r}$$

La somme de tous les termes est donc égale à :

$$S_{\infty} = u_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Exemple

$$S_{\infty} = 1 + 0,5^1 + 0,5^2 + 0,5^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} 0,5^n$$

On a :

$$u_{n+1} = 0,5^{n+1} = 0,5^n \times 0,5 = u_n \times 0,5$$

Il s'agit donc d'une suite géométrique de raison 0,5.

La somme des 2 premiers termes est égale à :

$$S_2 = u_0 \frac{1-r^2}{1-r} = 1 \times \frac{1-0,5^2}{1-0,5} = \frac{1-0,25}{1-0,5} = \frac{0,75}{0,5} = 1,5$$

La somme de tous les termes est égale à :

$$S_\infty = u_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-r^n}{1-r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-0,5^n}{1-0,5} = \frac{1}{0,5} = 2$$

Lien avec la transformée en Z

La transformée en Z monolatérale est définie par :

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} s(n)z^{-n}$$

On peut l'écrire également :

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (s(n)z^{-1})^n$$

Selon les valeurs de $s(n)$, il pourra donc s'agir d'une suite géométrique. Par exemple, dans le cas d'un échelon unité (voir ci-dessous), défini par $u(nT) = 1$ pour $n \geq 0$, on a :

$$Z(u(nT)) = \sum_{n=0}^{\infty} (u(n)z^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n$$

Il s'agit d'une suite géométrique de raison z^{-1} . Elle peut donc s'écrire :

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-z^{-n}}{1-z^{-1}} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

d) Transformée en z des signaux élémentaires

Ces transformées sont à comparer aux transformées équivalentes de Laplace.

Impulsion

Il s'agit ici de l'impulsion de Kronecker, définie par $\delta_k = \{1, 0, 0, \dots\}$:

$$\delta_k \xleftarrow{Z} 1$$

sans condition de convergence sur z. La démonstration est directe.

Echelon unité

Défini par $u(nT) = 1$ pour $n \geq 0$.

$$S(z) = Z(u(nT)) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$$

Il s'agit d'une suite géométrique de raison z^{-1} , définie par

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} s(n)z^{-n} = s(0) + s(1)z^{-1} + s(2)z^{-2} + \dots$$

dans laquelle le terme d'indice n est relié au terme d'indice n-1 par la relation :

$$s(n+1) = s(n)z^{-1}$$

Elle peut donc s'écrire :

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-z^{-n}}{1-z^{-1}} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

Finalement :

$$u(nT) \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

si $|z^{-1}| < 1$, soit $|z| > 1$.

Signal exponentiel

$s(nT) = e^{-anT}$ (provient de l'échantillonnage de $s(t) = e^{-at}$)

$$\begin{aligned} S(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} s(nT)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT}z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{aT}z)^{-n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (ze^{aT})^{-n}}{1 - (ze^{aT})^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}e^{-aT}} = \frac{z}{z - e^{-aT}} \end{aligned}$$

Finalement :

$$e^{-anT} \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - z^{-1}e^{-aT}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

si $|z^{-1}|e^{-aT} < 1$, soit si $|z| > e^{-aT}$.

e) Propriétés

Linéarité

$$Z[a_1e_1(n) + a_2e_2(n)] = a_1E_1(z) + a_2E_2(z)$$

Le domaine de convergence est l'intersection des domaines de convergence de $E_1(z)$ et $E_2(z)$.

Retard temporel

$$Z[e(n - n_0)] = \sum_{n=0}^{\infty} e(n - n_0)z^{-n}$$

On effectue le changement de variable :

$$n' = n - n_0$$

ce qui donne

$$Z[e(n - n_0)] = Z[e(n')] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e(n')z^{-n'-n_0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e(n')z^{-n'}z^{-n_0} = z^{-n_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e(n')z^{-n'} = z^{-n_0}E(z)$$

Un intérêt de cette propriété est qu'une puissance négative de z va se traduire dans le domaine temporel (discret) par l'utilisation d'échantillons passés.

Théorèmes des valeurs initiale et finale

Valeur initiale

$$s(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z-1}{z} S(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} S(z)$$

Elle permet de connaître la valeur initiale d'un signal discret à partir de sa transformée en Z . La démonstration est directe.

Valeur finale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)S(z)$$

Elle permet de connaître la valeur d'un signal discret, à partir de sa transformée en Z, quand n tend vers l'infini. La démonstration est un peu plus longue.

Transformée du Produit de Convolution

Le produit de convolution de deux signaux discrets a et b est défini par :

$$(a * b)(n) = \sum_i a(n-i)b(i) = \sum_i a(i)b(n-i)$$

avec $0 \leq i \leq n$ si a et b sont causaux. Comme pour la transformée de Laplace, on a : $Z(*) = \times$ et $Z(\times) = *$.

Fonction de transfert en Z et réponse impulsionnelle

La fonction de transfert en Z d'un système est définie par :

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)}$$

où E(z) et S(z) sont respectivement les transformées en Z des signaux d'entrée e(n) et de sortie s(n). Or, on a vu que la transformée en Z de l'impulsion de Kronecker était 1 :

$$\delta_k \xleftrightarrow{Z} 1$$

Si l'on applique ce signal en entrée du système, on obtient en sortie sa réponse impulsionnelle. On a donc :

$$H(z) = \frac{S(z)}{1} = S(z)$$

La fonction de transfert est donc la transformée en z de la réponse impulsionnelle du système. On retrouve la propriété des systèmes continus. L'application de la définition de la TZ (monolatérale) à cette fonction de transfert donne :

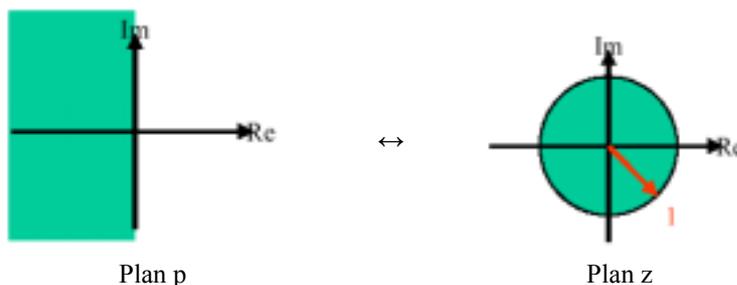
$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n}$$

donc les coefficients h(n) constituent les éléments de la réponse impulsionnelle.

Stabilité

Comme dans le cas continu, la fonction de transfert en z peut comporter des pôles (les racines du dénominateur) et des zéros (les racines du numérateur).

On pourrait démontrer que la correspondance entre le plan de la variable (complexe) de Laplace p et la variable (également complexe) z est la suivante : le demi-plan gauche dans le plan p correspond à l'intérieur du cercle unité dans le plan des z.



On peut en déduire une condition de stabilité du système : un système est stable si

↔ les pôles de sa transmittance de Laplace sont situés dans le demi-plan gauche (du plan des p)
 les pôles de sa fonction de transfert en z sont situés à l'intérieur du cercle unité (du plan des z)

Du point de vue de la réponse impulsionnelle, la condition de stabilité (dans le cas d'un système causal) est :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

Elle est à comparer avec la condition équivalente du cas continu :

$$\int_{t=0}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

f) Transformée en Z inverse

Quand on veut revenir du domaine en z au domaine temporel échantillonné, par exemple pour connaître la réponse impulsionnelle d'un système à partir de sa fonction de transfert, il est nécessaire d'inverser la transformée en z.

f.1) Division de polynômes

La fonction de transfert échantillonnée d'un système étant un rapport de 2 polynômes, on peut effectuer la division directe de ces 2 polynômes.

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)}$$

Le principe consiste à exprimer les 2 polynômes en puissances négatives de z et à les diviser par puissances décroissantes.

Exemple

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2}}$$

$$\frac{z^{-1}}{\sqrt{2}z^{-2} - z^{-3}} \quad \left| \begin{array}{l} 1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2} \\ z^{-1} + \sqrt{2}z^{-2} + \dots \end{array} \right.$$

Il n'y a plus ensuite qu'à appliquer la TZ inverse à chacun des termes du résultat pour obtenir les échantillons de la réponse impulsionnelle du système.

Cette méthode est simple mais son inconvénient est qu'elle donne les valeurs numériques du résultat, pas son expression analytique.

f.2) Décomposition en éléments simples

Cette méthode est similaire à celle utilisée pour la transformation de Laplace inverse. Elle consiste à décomposer la fonction de transfert en Z en une somme de fonctions de transfert élémentaires (éléments simples), et à appliquer la transformation inverse à chacune de ces dernières.

Pour une fonction de transfert de la forme

$$\frac{A_i}{z - z_i}$$

où z_i est un pôle simple, le coefficient A_i (appelé résidu), s'obtient par :

$$A_i = [H(z)(z - z_i)]_{z=z_i}$$

Dans le cas d'un pôle multiple, il y a autant de fractions rationnelles que le degré de ce pôle. Par exemple, dans le cas d'un pôle double :

$$H(z) = \dots + \frac{A_{i,0}}{(z - z_i)^2} + \frac{A_{i,1}}{z - z_i} + \dots$$

Les coefficients sont obtenus par les expressions :

$$A_{i,0} = [H(z)(z - z_i)^2]_{z=z_i}, \quad A_{i,1} = \frac{1}{1!} \left[\frac{d(H(z)(z - z_i)^2)}{dz} \right]_{z=z_i}$$

Dans le cas d'un pôle de degré q :

$$A_{i,0} = [H(z)(z - z_i)^q]_{z=z_i}, \quad A_{i,1} = \frac{1}{1!} \left[\frac{d(H(z)(z - z_i)^q)}{dz} \right]_{z=z_i}, \quad A_{i,2} = \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2(H(z)(z - z_i)^q)}{dz^2} \right]_{z=z_i},$$

$$\dots, \quad A_{i,q-1} = \frac{1}{(q-1)!} \left[\frac{d^{q-1}(H(z)(z - z_i)^q)}{dz^{q-1}} \right]_{z=z_i}$$

L'ordre des résidus tels que formalisés ci-dessus correspond aux puissances décroissantes du dénominateur :

$$\dots + \frac{A_{i,0}}{(z - z_i)^q} + \frac{A_{i,1}}{(z - z_i)^{q-1}} + \frac{A_{i,2}}{(z - z_i)^{q-2}} + \dots + \frac{A_{i,q-1}}{z - z_i} + \dots$$

f.3) Méthode des résidus

Cette méthode est proche de la précédente, mais au lieu de donner une expression simplifiée de la transformée en z, elle donne directement le résultat de la transformation inverse, c'est à dire le signal discret.

Elle est basée sur le théorème de Cauchy, qui évalue l'intégrale définissant le signal discret par la méthode des résidus.

Le signal échantillonné s(n) est donc défini par :

$$s(n) = Z^{-1}[S(z)] = \sum_{\substack{\text{pôles} \\ S(z)z^{n-1}}} \text{Résidus}(S(z)z^{n-1})$$

avec, pour le résidu de S(z) en z=z_i pôle d'ordre m :

$$\text{Résidu}_{z_i}^m = \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_i)^m S(z)z^{n-1})$$

Cette définition est la même que celle déjà vue pour le cas continu avec la transformée de Laplace.

Le cas particulier d'un pôle simple simplifie l'expression du résidu :

$$\text{Résidu}_{z_i}^1 = \lim_{z \rightarrow z_i} (z - z_i) S(z)z^{n-1}$$

g) Equation aux différences

A partir de la transformée en z d'un système, on peut en déduire l'équation aux différences qui exprime l'élément de sortie s(n) en fonction de ses valeurs passées (s(n-1), s(n-2), etc) et de la valeur présente et des valeurs passées de l'entrée (e(n), e(n-1), e(n-2), etc). C'est l'équivalent du calcul du signal de sortie s(t) en fonction d'un signal d'entrée e(t) dans le cas continu.

Transformation d'une fonction de transfert en z en équation aux différences

La forme générale de la fonction de transfert en z d'un filtre numérique est :

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_p z^{-p}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_Q z^{-Q}} = \frac{\sum_{p=0}^P a_p z^{-p}}{1 + \sum_{q=1}^Q b_q z^{-q}}$$

$E(z)$ et $S(z)$ représentent respectivement les transformées en z des échantillons d'entrée $e(n)$ (avec $n=kT_e$) et de sortie $s(n)$ courants :

$$\begin{aligned} E(z) &= Z\{e(n)\} \\ S(z) &= Z\{s(n)\} \end{aligned}$$

Les propriétés de la transformée en z utilisées pour passer de la fonction de transfert en z à l'équation de récurrence (et réciproquement), sont celle du retard temporel et celle de la linéarité.

Si L est l'ordre du numérateur, K l'ordre du dénominateur, l'ordre du filtre est $\max(P, Q)$.

$$S(z) \cdot [1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_Q z^{-Q}] = E(z) \cdot [a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_p z^{-p}]$$

\leftrightarrow

$$s(n) + b_1 s(n-1) + b_2 s(n-2) + \dots + b_Q s(n-Q) = a_0 e(n) + a_1 e(n-1) + a_2 e(n-2) + \dots + a_p e(n-P)$$

$$s(n) = a_0 e(n) + a_1 e(n-1) + a_2 e(n-2) + \dots + a_p e(n-P) - b_1 s(n-1) - b_2 s(n-2) - \dots - b_Q s(n-Q)$$

Les filtres définis par ces expressions sont appelés "filtres à réponse impulsionnelle infinie" (RII, ou IIR en anglais)

Dans le cas d'un filtre purement récursif, on a :

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{q=1}^Q b_q z^{-q}}, \quad a_i = 0 \quad \forall i$$

La sortie ne dépend que de ses valeurs passées et de l'échantillon d'entrée courant $e(n)$. Un échantillon $s(n)$ ne dépend que des échantillons $s(n-i)$, et plus du tout des échantillons d'entrée $e(n-i)$:

$$s(n) = e(n) - b_1 s(n-1) - b_2 s(n-2) - \dots - b_Q s(n-Q)$$

On peut également considérer le cas où le dénominateur est égal à 1. La fonction de transfert est alors réduite à :

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \sum_{p=0}^P a_p z^{-p}$$

L'équation aux différences correspondante devient :

$$s(n) = a_0 e(n) + a_1 e(n-1) + a_2 e(n-2) + \dots + a_p e(n-P)$$

La sortie ne dépend plus que de l'entrée. Les filtres définis par ces expressions sont appelés "filtres à réponse impulsionnelle finie" (RIF, ou FIR en anglais).

Lien avec la convolution numérique

Dans le cas d'un filtre RIF, les échantillons de sortie ne dépendent plus que des échantillons d'entrée (voir ci-dessus), on retrouve l'expression de la convolution numérique étudiée précédemment. On avait écrit cette expression de la manière suivante :

$$s_k = e_k * h_k = \sum_{i=0}^{N-1} e_{k-i} \cdot h_i \quad \text{avec } k=0, 1, \dots, M+N-1$$

où M est la longueur de la séquence d'entrée e_k et N celle du filtre h_k .

Lien avec la stabilité

Un filtre RII peut avoir une réponse indéfiniment différente de 0, d'où son nom. Donc il peut être instable, selon la valeur des coefficients. Par exemple, avec le filtre suivant :

$$s(n)=1,01 \times s(n-1)$$

L'échantillon courant $s(n)$ est toujours supérieur à l'échantillon précédent $s(n-1)$, donc on a une divergence.

Dans le cas où la sortie ne dépend que des entrées (valeur présente et valeurs passées), on a un filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF) ou transversal. Un filtre RIF ne peut pas être instable.

h) Exemple de programmation avec Scilab

Le programme suivant applique un filtrage numérique simple à un fichier-son de type WAV, et réalise un affichage graphique du son original et du son traité. Le filtrage est un moyennage sur 3 échantillons.

```
clear
//Lecture du fichier son (format WAV)
REP_WAV="c:\travail\benoit\PROG\SIGNAL\SONS\"; //répertoire du fichier WAV
nom_fich=REP_WAV+"sophie0.wav"
[e,fe]=wavread(nom_fich);
Te=1/fe;
N=length(e); //nombre d'échantillons du signal

//Filtrage
s(1)=e(1);
s(2)=e(2);
for n=3:N
    s(n)=(e(n)+e(n-1)+e(n-2))/3;
end;
xbasc
//effacement de l'écran graphique
xsetech([0,0,1,1/2]); //définition de la zone graphique
plot(e(1:N));
//affichage
xsetech([0,1/2,1,1/2]);
plot(s(1:N));

//Sauvegarde résultat
nom_fich=REP_WAV+"test1.wav";
savewave(nom_fich, s, fe);
```

IV.3.2) Synthèse des filtres

La synthèse des filtres numériques consiste à déterminer leurs coefficients, en fonction des caractéristiques du filtrage souhaité.

On a vu que les filtres numériques pouvaient être du type RIF ou RII. Les méthodes de synthèse sont très différentes pour ces 2 cas.

IV.3.2.1) Synthèse des filtres RII

a) Transformations analogique vers numérique

Cette transformation consiste à passer d'une fonction de transfert analogique définie en variable de Laplace p ou en variable harmonique $j\omega$, en fonction de transfert numérique, c'est à dire dont la variable est z . Une fois la fonction de transfert en z obtenue, on peut passer facilement à l'équation de récurrence en utilisant la propriété de retard de la TZ. Cette équation de récurrence peut alors être programmée sur un système numérique.

Il existe plusieurs méthodes de transformations possibles :

- équivalence de la réponse impulsionnelle, ou transformation standard ;
- équivalence de la dérivation ou transformation d'Euler ;
- équivalence de l'intégration, transformation bilinéaire (ou transformation homographique).

a.1) Méthode de l'invariance impulsionnelle

Cette méthode nécessite de mettre la fonction de transfert en p sous la forme d'une somme d'éléments simples, ce qui équivaut à une mise en parallèle de filtres élémentaires :

$$H(p) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{p - p_i}$$

Étudions ce qui se passe pour un pôle p_i :

$$H(p) = \frac{1}{p - p_i}$$

La réponse impulsionnelle correspondante est :

$$h(t) = e^{p_i t}$$

Celle-ci est échantillonnée avec la période T_e . Son expression devient :

$$h(nT_e) = T_e e^{p_i n T_e}$$

La multiplication de l'amplitude par T_e n'est pas toujours présente. Elle permet de donner au signal de sortie discret une amplitude correcte.

Enfin, on peut s'affranchir de la référence temporelle du signal en utilisant simplement l'indice n :

$$h(n) = T_e e^{p_i n T_e}$$

La transmittance en z est la transformée en z de la réponse impulsionnelle :

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) \cdot z^{-n} = T_e \sum_{n=0}^{\infty} e^{p_i n T_e} \cdot z^{-n} = T_e \sum_{n=0}^{\infty} (e^{p_i T_e} \cdot z^{-1})^n$$

Cette somme est une suite géométrique telle que :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

et :

$$u_{n+1} = r u_n$$

En effet, on a :

$$u_{n+1} = (e^{p_i T_e} \cdot z^{-1})^{n+1} = (e^{p_i T_e} \cdot z^{-1}) (e^{p_i T_e} \cdot z^{-1})^n = (e^{p_i T_e} \cdot z^{-1}) u_n$$

La raison de cette suite est :

$$r = e^{p_i T_e} \cdot z^{-1}$$

Donc finalement :

$$H(z) = T_e \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (e^{p_i T_e} z^{-1})^{n+1}}{1 - e^{p_i T_e} z^{-1}} = T_e \frac{1}{1 - e^{p_i T_e} z^{-1}}$$

Une fois établie cette fonction de transfert, on peut en déduire l'équation aux différences :

$$H(z) = T_e \frac{1}{1 - e^{p_i T_e} z^{-1}} = \frac{S(z)}{E(z)} \quad \Leftrightarrow \quad S(z) = T_e E(z) + e^{p_i T_e} z^{-1} S(z)$$

$$\Leftrightarrow \quad s(n) = T_e e(n) + e^{p_i T_e} s(n-1)$$

Pour bien se rendre compte du fait que le facteur T_e est nécessaire, regardons ce qui se passe pour un échelon unité en entrée. Celui-ci est défini par $u(n)=1$ pour $n \geq 0$, $u(n)=0$ pour $n < 0$. La fonction de transfert étudiée ici est celle d'un filtre passe-bas du 1^{er} ordre, et on sait que la réponse indicielle d'un tel filtre analogique est une exponentielle convergente vers $u(t)$. Sans le facteur T_e , on aurait $s(0)=e(0)$, ce qui n'est pas correct.

La transformation par invariance impulsionnelle est adaptée à la synthèse de filtres passe-bas et passe-bande mais pas à celle des filtres passe-haut.

Exemple de programme Scilab

Pour le filtre passe-bas du 1^{er} ordre défini par :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

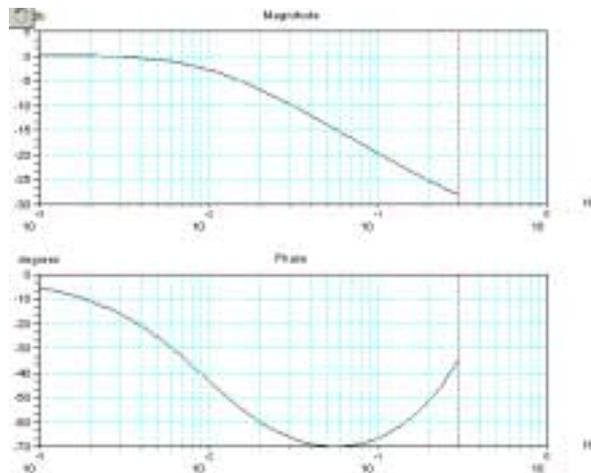
avec $f_c=1\text{Hz}$ et $f_e=10\text{Hz}$, on obtient l'équation aux différences :

$$s(n)=0,9391e(n)+0,0628s(n-1)$$

L'affichage du diagramme de Bode correspondant à cette équation peut se faire à l'aide de Scilab :

```
a=[0, 0.0628];  
b=[-0.9391, 1];  
num=poly(a, "z", "coef");  
den=poly(b, "z", "coef");  
sys=syslin('d', num, den);  
xbasc  
bode(sys, 0.001, 0.3)
```

Le résultat obtenu est le suivant :



On observe une distorsion de phase pour les hautes fréquences.

a.2) Equivalence de la dérivation

Le principe de cette méthode est de donner une approximation de la dérivée d'une fonction continue. Cette dérivée est une variation de la fonction pour un intervalle sur l'axe des abscisses tendant vers 0 ; dans le cas numérique, l'intervalle le plus petit possible est le décalage temporel entre 2 échantillons successifs, c'est à dire la période d'échantillonnage.

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \rightarrow y_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{T_e}$$

Dans le domaine de Laplace, l'opération de dérivation consiste à multiplier le signal par p. Le passage de la variable de Laplace vers la variable z consiste à remplacer p par la relation suivante :

$$p \rightarrow \frac{1 - z^{-1}}{T_e}$$

La transformation analogique-vers-numérique basée sur l'équivalence de la dérivation est peut-être la plus intuitive, car elle permet de partir directement de l'équation différentielle.

Par exemple, dans le cas d'un filtre RC de type passe-bas du 1^{er} ordre, on a :

$$v_e(t) = RC \frac{dv_s(t)}{dt} + v_s(t)$$

$$e(n) = RC \left(\frac{s(n) - s(n-1)}{T_e} \right) + s(n)$$

$$e(n) = s(n) \left(\frac{\tau}{T_e} + 1 \right) - \frac{\tau}{T_e} s(n-1)$$

avec $\tau = RC$

$$e(n) = s(n)(\alpha + 1) - \alpha s(n-1)$$

avec $\alpha = \frac{T_e}{\tau}$

$$s(n) = \frac{1}{\alpha + 1} e(n) + \frac{\alpha}{\alpha + 1} s(n-1)$$

$$s(n) = \beta e(n) + (1 - \beta) s(n-1)$$

avec $\beta = \frac{1}{\alpha + 1} = \frac{1}{\frac{T_e}{\tau} + 1}$

La fonction de transfert en z correspondante est :

$$H(z) = \frac{\beta}{1 - (1 - \beta)z^{-1}}$$

Exemple d'application numérique :

$$R=1\text{k}\Omega, C=1\mu\text{F}, T_e=1/44100 \rightarrow \tau=RC=0,001\text{s},$$

$$\alpha = \frac{T_e}{\tau} = \frac{1}{44100 \times 0,001} = 0,0226757$$

$$\beta = \frac{1}{\alpha + 1} = 0,9778271$$

$$1 - \beta = 0,0221729$$

La relation de récurrence est donc :

$$s(n) = 0,9778271e(n) + 0,0221729s(n-1)$$

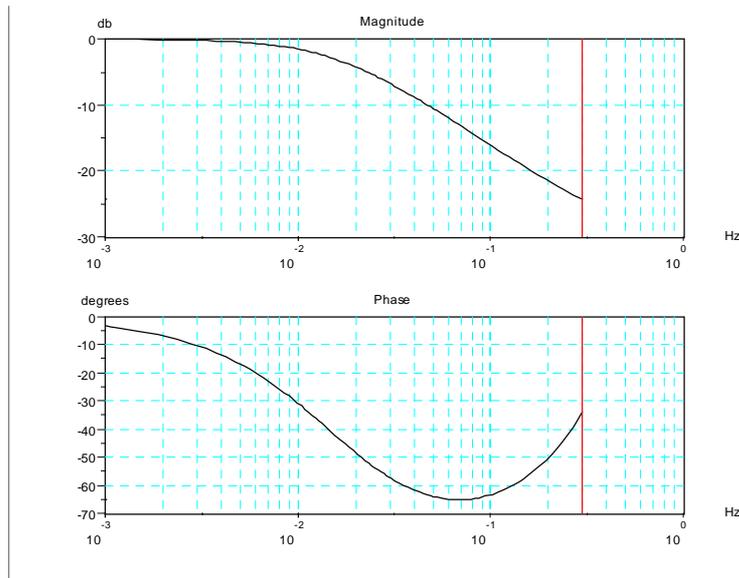
et la fonction de transfert en z :

$$H(z) = \frac{0,9778271}{1 - 0,0221729z^{-1}}$$

Exemple de programmation sous Scilab :

```
//Dérivée par approximation directe de l'équation analogique
R=1000;
C=0.00000022;
tho=R*C;
fe=44100;
Te=1/fe;
alpha=tho/Te;
beta=1/(alpha+1)
fc=1/(2*pi*tho) //fréquence de coupure (=723,4Hz)
fcn=fc/fe //normalisée (=0,0164)
a0=beta;
a1=0;
a=[a1,a0]
b0=1;
b1=1-beta
b=[-b1,b0]
num=poly(a, "z", "coef");
den=poly(b, "z", "coef");
sys=syslin('d', num, den)
bode(sys, 0.001, 0.3)
```

Le résultat obtenu est :



On voit que cette transformation s'accompagne d'une distorsion de la phase aux fréquences approchant $f_c/2$ (symbolisée par la ligne verticale rouge sur le diagramme de Bode de Scilab), car celle-ci devrait converger vers -90° quand $f \rightarrow \infty$.

a.3) Equivalence de l'intégration : transformée bilinéaire

Principe

Le principe de cette méthode est de donner une approximation de l'intégrale d'une fonction continue, basée sur la méthode des trapèzes :

$$x(t) = \int_0^t y(t).dt \rightarrow x_k = x_{k-1} + \frac{T_e}{2} [y_k + y_{k+1}]$$

$$p \rightarrow \frac{2}{T_e} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

ou, de manière équivalente :

$$p = \frac{2}{T_e} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$

T_e est la période d'échantillonnage.

Souvent, la variable de Laplace est réduite, c'est à dire que la fonction de transfert est exprimée en fonction de

$$\frac{p}{\omega_c}$$

On remplace alors cette variable par :

$$\frac{p}{\omega_c} = \frac{f_e}{\pi f_c} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$

Comme pour la méthode de transformation par équivalence de la dérivée, pour synthétiser un filtre analogique, on part donc de la fonction de transfert complexe $H(j\omega)$, on passe à la fonction de transfert de Laplace $H(p)$ (variable $p=j\omega$), puis à la fonction de transfert échantillonnée $H(z)$, la variable z étant obtenue à l'aide de la transformée bilinéaire.

Exemple d'un filtre passe-bas du 1^{er} ordre

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} \quad \leftrightarrow \quad H(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_c}}$$

On effectue le changement de variable décrit ci-dessus :

$$H(z) = \frac{1}{1 + \frac{f_c}{\pi f_c} \cdot \frac{z-1}{z+1}}$$

$$H(z) = \frac{1}{1+k} \frac{1+z^{-1}}{1 + \left(1 - \frac{f_c}{\pi f_c}\right) \cdot \frac{1}{1+k} z^{-1}} \quad \text{avec } k = \frac{f_e}{\pi f_c}$$

Ce qui donne pour les coefficients :

$$a_0 = \frac{1}{1+k} ; a_1 = a_0 ; b = \frac{1-k}{1+k}$$

Application numérique

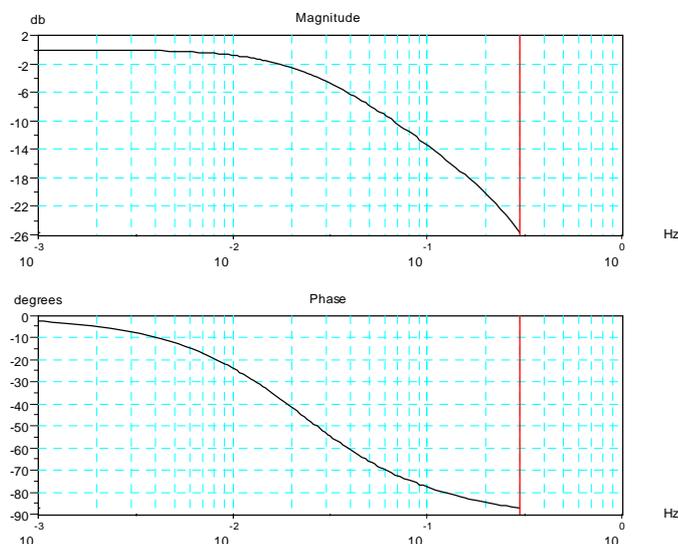
$$f_e = 44100 \text{ Hz}, f_c = 1000 \rightarrow k = 14,037466 ; a = 0,0665006 ; b = -0,8669989$$

$$H(z) = 0,0665 \frac{1+z^{-1}}{1-0,867z^{-1}}$$

Exemple de programmation avec Scilab

```
//Dérivée par la transformée bilinéaire
fe=44100;
fc=1000;
fcn=fc/fe
k=fe/(%pi*fc);
a0=1/(1+k)
a1=a0;
a=[a1,a0]
b0=1;
b1=(1-k)*a0;
b=[b1,b0]
num=poly(a, "z", "coef");
den=poly(b, "z", "coef");
sys=syslin('d', num, den)
bode(sys, 0.001, 0.3)
```

Le résultat obtenu est :



On constate que la phase est moins distordue qu'avec les transformations par échantillonnage de la réponse impulsionnelle et par équivalence de la dérivation. On est donc plus proche du cas continu.

Amélioration de la transformée bilinéaire

La transformation bilinéaire définie ci-dessus n'est vraie que pour $f \ll f_e$. Elle s'accompagne d'une distorsion de la réponse fréquentielle du filtre numérique obtenue, pour les fréquences proches de f_e , même si cette distorsion est plus faible qu'avec la transformation par équivalence de la dérivation.

Une correction est donc nécessaire pour que le filtre numérique modélise le filtre analogique pour toutes les fréquences. L'expression de la véritable transformée est :

$$p = \frac{\omega}{\operatorname{tg} \frac{\omega T_e}{2}} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$

On peut remarquer que $\operatorname{tg}(x) \approx x$ si $x \ll \pi/2$, donc $\operatorname{tg} \frac{\omega T_e}{2} \approx \frac{\omega T_e}{2}$ si $\frac{\omega T_e}{2} \ll \pi/2$,

soit

$$\omega T_e \ll \pi \quad \leftrightarrow \quad T \ll T_e.$$

On retrouve donc bien la première forme de la transformée bilinéaire dans ce cas.

Pour appliquer cette transformée améliorée, on peut :

- soit appliquer directement l'expression de cette transformée,
- soit réaliser une pré-distorsion sur le filtre analogique, c'est à dire calculer une 2^e fréquence en fonction de la fréquence souhaitée avant d'appliquer la transformée bilinéaire :

$$\omega' = \frac{2}{T_e} \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega T_e}{2}$$

b) Forme générale de la fonction de transfert des filtres du 1^{er} et 2nd ordre(s)

1^{er} ordre

$$H(z) = a_0 \frac{1 + a_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1}}$$

ou

$$H(z) = \frac{a'_0 + a'_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1}} \quad \text{avec } a'_0 = a_0 ; a'_1 = \frac{a_0}{a_1}$$

2nd ordre

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$$

ou

$$H(z) = a'_0 \frac{1 + a'_1 z^{-1} + a'_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} \quad \text{avec } a'_0 = a_0 ; a'_1 = \frac{a_1}{a_0} ; a'_2 = \frac{a_2}{a_0}$$

Stabilité

Un filtre numérique est stable si les pôles de sa fonction de transfert en z (racines, réelles ou complexes, du dénominateur) sont à l'intérieur du cercle unité, c'est à dire ont un module inférieur à 1. Ceci mène aux conditions suivantes sur les coefficients des filtres :

- dans le cas du 1^{er} ordre :

$$|b| < 1$$

- dans la fonction de transfert du 2^e ordre :

$$0 \leq b_2 < 1$$

$$|b_1| < 1 + b_2$$

Démonstration (pour information)

$$H(z) = \frac{a_0 z^2 + a_1 z + a_2}{z^2 + b_1 z + b_2}$$

$$z^2 + b_1 z + b_2 = (z - z_1)(z - z_2)$$

Cette équation admet 2 solutions :

$$z_1, z_2 = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4b_2}}{2}$$

Si on impose qu'elles soient inférieures à 1 on tombe sur la condition donnée ci-dessus :

$$-1 < \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4b_2}}{2} < 1$$

1^{ère} condition

$$\frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4b_2}}{2} < 1$$

a)

$$\frac{-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4b_2}}{2} < 1$$

$$-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4b_2} < 2$$

$$-\sqrt{b_1^2 - 4b_2} < 2 + b_1$$

$$b_1^2 - 4b_2 < 4 + 4b_1 + b_1^2$$

$$-4b_2 < 4 + 4b_1$$

$$-b_2 < 1 + b_1$$

$$-b_2 - 1 < b_1$$

$$-b_1 < b_2 + 1 \quad (1)$$

b)

$$\frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_2}}{2} < 1$$

On retombe sur le cas du a) car la mise au carré de la racine carré ou de son opposé donne le même résultat.

2^e condition

$$\frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4b_2}}{2} > -1$$

a)

$$\frac{-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4b_2}}{2} > -1$$

$$-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4b_2} > -2$$

$$-\sqrt{b_1^2 - 4b_2} > -2 + b_1$$

$$\begin{aligned}
b_1^2 - 4b_2 &> 4 - 4b_1 + b_1^2 \\
-4b_2 &> 4 - 4b_1 \\
-b_2 &> 1 - b_1 \\
-b_2 - 1 &> -b_1 \\
b_1 &< b_2 + 1 \quad (2)
\end{aligned}$$

b) On retombe sur a).

On peut combiner les résultats (1) et (2) sous forme d'un seul :

$$\begin{aligned}
-b_1 &< b_2 + 1 \quad \text{et} \quad b_1 < b_2 + 1 \\
\leftrightarrow \quad |b_1| &< b_2 + 1
\end{aligned}$$

En effet, si $a=|b|$, cela équivaut à $a=b$ si $a \geq 0$ ou à $a=-b$ si $a < 0$.

Intérêt des filtres du 1^{er} et du 2^e ordre

Dans le cas continu, on a vu que tout filtre d'ordre quelconque pouvait être réalisé au moyen de filtres du 1^{er} et/ou du 2^e ordre. Du point de vue de la fonction de transfert de ce filtre d'ordre quelconque, cela correspond à une décomposition sous forme d'un produit de fonctions de transfert d'ordre 1 et/ou 2 ; du point de vue des schémas blocs, cela correspond à une mise en cascade (=en série) de blocs schématisant des systèmes d'ordre 1 et/ou 2.

Cette propriété se retrouve bien sûr dans le cas numérique.

IV.3.2.2) Synthèse des filtres RIF

a) Généralités

Les filtres RIF ne comportent pas de terme de récurrence dans leur équation aux différences, c'est à dire que l'échantillon de sortie $s(n)$ ne dépend que des échantillons présent et passés de l'entrée. Par rapport à l'équation aux différences écrite plus haute, celle d'un filtre RIF ne comporte pas de terme de récurrence :

$$s(n) = a_0 e(n) + a_1 e(n-1) + a_2 e(n-2) + \dots + a_p e(n-P)$$

Alors que les filtres RII se calculent dans la plupart des cas à partir de filtres continus, permettant donc d'implémenter sur un calculateur numérique (ordinateur, système à DSP...) un filtre pouvant être réalisé également en électronique, les RIF se calculent à partir à partir de méthodes purement numériques, sans lien avec un équivalent analogique.

On remarque que, comme il n'y a pas de termes de récurrence, cette expression est celle d'un produit de convolution numérique (voir également plus haut) ; les coefficients a_i sont donc ceux de la réponse impulsionnelle du système. En général, la notation pour les coefficients d'une réponse impulsionnelle est h :

$$s(n) = h(0)e(n) + h(1)e(n-1) + h(2)e(n-2) + \dots + h(P)e(n-P)$$

Une des propriétés de ces filtres est de pouvoir posséder une phase linéaire en fonction de la fréquence, ce qui correspond à un temps de propagation de groupe constant. En effet, le temps de propagation de groupe est égal à la dérivée de la phase par rapport à la pulsation :

$$t_g = -\frac{d\phi}{d\omega}$$

On peut démontrer que cette condition est réalisée si les coefficients du filtre présentent une symétrie par rapport au coefficient central (d'indice $N/2$ si N est pair, $N/2-1$ si N impair).

La synthèse des filtres de type RIF est basée sur deux propriétés :

- la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle d'un système est sa réponse en fréquence ;
- les coefficients d'un filtre RIF correspondent à sa réponse impulsionnelle échantillonnée.

Les 2 paragraphes suivants décrivent 2 méthodes permettant d'obtenir les coefficients des filtres RIF à partir de leurs caractéristiques fréquentielles désirées.

b) Synthèse par développement en séries de Fourier et fenêtrage

Cette méthode consiste à considérer que la réponse en fréquence désirée est une fonction périodique de période f_c (ce qui est le cas dans le domaine de l'échantillonné ; voir paragraphe sur la Transformée de Fourier Discrète). Elle peut donc être décomposée en série de Fourier, dont les coefficients permettront d'obtenir ceux du filtre recherché.

Par rapport à l'utilisation habituelle des séries de Fourier, le temps et la fréquence sont donc inversés.

Principe

Dans le cas "classique" on a, pour un signal périodique $s(t)$:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot e^{jk2\pi \frac{t}{T}} \quad \text{avec} \quad c_k = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) \cdot e^{-jk2\pi \frac{t}{T}} dt$$

Ici on intervertit le temps et la fréquence (et on renomme s en H et c en g , par exemple) :

$$H(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_k \cdot e^{jk2\pi \frac{f}{f_c}} \quad \text{avec} \quad g_k = \frac{1}{f_c} \int_0^{f_c} H(f) \cdot e^{-jk2\pi \frac{f}{f_c}} df$$

En général, la fonction de transfert est prise réelle (=à phase nulle). L'expression des coefficients devient :

$$g_k = \frac{1}{f_c} \int_0^{f_c} H(f) \cdot \cos\left(2\pi k \frac{f}{f_c}\right) df$$

$H(f)$ est alors égale à son module $|H(f)|$.

De plus, la fonction étant symétrique par rapport à $f_c/2$, on peut écrire :

$$g_k = \frac{2}{f_c} \int_0^{f_c/2} H(f) \cdot \cos\left(2\pi k \frac{f}{f_c}\right) df$$

Enfin, pour simplifier cette expression, on peut utiliser la fréquence relative

$$F = \frac{f}{f_c}$$

L'expression devient donc :

$$g_k = 2 \int_0^{0,5} H(f) \cdot \cos(2\pi k F) dF$$

Troncature et décalage

Le nombre de coefficients du filtre ne peut pas être égal à l'infini. On réalise donc un fenêtrage des coefficients. Dans le cas le plus simple (mais pas le meilleur !), la fenêtre est rectangulaire, ce qui revient à considérer que seuls une partie des coefficients, les plus significatifs, ne sont pas nuls. Ce fenêtrage est réalisé au moyen d'une multiplication point par point entre les coefficients et des valeurs de la fenêtre superposée. Ce produit se traduit, au niveau fréquentiel, par un produit de convolution entre la TF des coefficients (=la fonction de transfert recherchée) et la TF de la fenêtre. La TF d'une fenêtre rectangulaire est un sinus cardinal ; le résultat de cette convolution va se traduire au niveau fréquentiel par des

ondulations au niveau des transitions rapides : c'est le phénomène de Gibbs. D'autres formes de fenêtres (triangulaire, de Hanning, de Hamming, etc) présentant des transitions plus douces permettent d'atténuer ce phénomène d'ondulations. Cette troncature limite les valeurs de k à : $-(N-1)/2, \dots, 0, \dots, (N-1)/2$, où N est le nombre de coefficients choisi pour le filtre.

Ca n'est pas tout. Les coefficients g_k obtenus de cette manière ne correspondent pas à un système causal car il sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées et donc possède une moitié définie pour $t < 0$. Pour rendre le système causal et donc physiquement réalisable, il suffit de décaler les coefficients vers la droite de $N/2$ échantillons. Les coefficients du filtre recherché h_k ($k=0, \dots, N-1$) sont obtenus par décalage des coefficients g_k :

$$h_k = g_{k-p}, \quad k=0, \dots, N-1$$

avec

$$p = \frac{N-1}{2}$$

En général, le module de la fonction de transfert est prise égale à 1 sur une plage de fréquence donnée et égale à 0 partout ailleurs. Le calcul de l'intégrale peut alors être réalisé par un algorithme simple.

Calcul pour les principaux types de filtres

On peut calculer cette expression dans le cas des 4 principaux types de filtres existants : passe-bas, passe-haut, passe-bande, coupe-bande.

Filtre passe-bas

On a : $H(F)=1$ de 0 à F_c et $H(F)=0$ de F_c à 0,5, on aurait :

$$g_k = 2 \int_0^{F_c} \cos(2\pi k F) dF$$

soit

$$g_k = \frac{1}{k\pi} \sin(2\pi k F_c), \quad k=-(N-1)/2, \dots, 0, \dots, (N-1)/2$$

On peut penser que le calcul de cette expression sous cette forme peut poser problème pour $k=0$. Mais il faut se souvenir que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

C'est la fonction sinus cardinal, qui ressemble à la fonction cosinus dont l'amplitude est pondérée par une enveloppe exponentielle :

$$\text{sin c}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

On peut donc écrire g_k sous la forme :

$$g_k = 2F_c \text{sin c}(2kF_c)$$

Filtre passe-haut

On a : $H(F)=0$ de 0 à F_c et $H(F)=1$ de F_c à 0,5, on aurait :

$$g_k = 2 \int_{F_c}^0 \cos(2\pi k F) dF$$

soit

$$g_k = -\frac{1}{k\pi} \sin(2\pi k F_c) \quad \text{ou} \quad g_k = -2F_c \text{sin c}(2kF_c)$$

Filtre passe-bande

On a : $H(F)=0$ de 0 à F_{c1} , $H(F)=1$ de F_{c1} à F_{c2} , et $H(F)=0$ de F_{c2} à 0,5, on aurait :

$$g_k = 2 \int_{F_{c1}}^{F_{c2}} \cos(2\pi k F) dF$$
$$g_k = \frac{1}{k\pi} (\sin(2\pi k F_{c2}) - \sin(2\pi k F_{c1}))$$

Filtre coupe-bande

On a : $H(F)=1$ de 0 à F_{c1} , $H(F)=0$ de F_{c1} à F_{c2} , et $H(F)=1$ de F_{c2} à 0,5, on aurait :

$$g_k = 2 \left\{ \int_0^{F_{c1}} \cos(2\pi k F) dF + \int_{F_{c2}}^{0,5} \cos(2\pi k F) dF \right\}$$

De la même manière que précédemment, on peut facilement démontrer que l'on obtient :

$$g_k = \frac{1}{k\pi} (\sin(2\pi k F_{c1}) - \sin(2\pi k F_{c2}))$$

Exemple d'application

Considérons un filtre passe-bas de fréquence de coupure $f_c=441\text{Hz}$, à appliquer à un signal échantillonné à $f_e=44100\text{Hz}$, et un filtre numérique possédant $N=15$ coefficients. La fréquence de coupure relative est donc égale à $F_c=0,01$.

La relation donnant les coefficients g_k est :

$$g_k = \frac{1}{k\pi} \sin(0,01k\pi), k=-7, \dots, 7$$

et celle donnant les h_k :

$$h_k = g_{k-7}, k=0, \dots, 14$$
$$= \frac{1}{(k-p)\pi} \sin(0,01(k-p)\pi) \text{ avec } p=(N-1)/2=7$$

L'application numérique est immédiate.

Amélioration du fenêtrage

Une fois l'implémentation de ce filtre effectuée, on peut constater des oscillations dans la fonction de transfert, au niveau des bandes de transition. Il s'agit du phénomène de Gibbs.

Ce phénomène peut être compensé (au détriment de la raideur de la pente) par un fenêtrage de la réponse impulsionnelle calculée par la méthode décrite ci-dessus.

Ce fenêtrage consiste à multiplier cette réponse impulsionnelle, point par point, avec une fenêtre pouvant avoir plusieurs formes possibles. Une fenêtre couramment utilisée est celle dite de Hamming. Elle est définie par :

$$w_k = 0,54 + 0,46 \times \cos\left(\frac{k2\pi}{N}\right), k=-(N-1)/2, \dots, 0, \dots, (N-1)/2$$

(= 0 pour les autres valeurs de k)

La conséquence du fenêtrage est une diminution des oscillations, au détriment de la raideur de la transition : celle-ci est moins rapide avec le fenêtrage que sans.

Algorithme du cas passe-bas

Plutôt que de chercher à réaliser un algorithme général, on préfère en écrire un différent pour chacun des 4 types de filtres possibles. Seul le cas du passe-bas est donné ici, mais les autres cas ne posent pas de problèmes particuliers et sont basés sur le même principe.

```
Lire la valeur de N (nombre de coefficients du filtre, impair)
p=(N-1)/2
lire la valeur de la fréquence de coupure normalisée
pour k variant de 0 à N-1
    si k=p //sinus(x)/x pour x=0 traité à part
        h(k+1)=2*fc;
    sinon
        h(k+1)=sin(2*pi*(k-p)*fc)/((k-p)*pi); //k-p pour le décalage
```

Même chose avec fenêtrage :

```
Lire la valeur de N (nombre de coefficients du filtre, impair)
p=(N-1)/2
lire la valeur de la fréquence de coupure normalisée
pour k variant de 0 à N-1
    w(k+1)=0.5*(1+cos(2*pi*(k-p)/N));
    si k=p //sinus(x)/x pour x=0 traité à part
        h(k+1)=2*fc*w(k+1);
    sinon
        h(k+1)=w(k+1)*sin(2*pi*(k-p)*fc)/((k-p)*pi);
```

c) Synthèse par transformée de Fourier discrète inverse (TFD⁻¹)

Cette méthode est assez proche de la précédente basée sur une décomposition en série de Fourier. Mais plutôt que de considérer que la réponse en fréquence est une fonction périodique, on va l'échantillonner et calculer sa TFD⁻¹.

Cette méthode utilise la propriété selon laquelle la TFD de la réponse impulsionnelle d'un filtre (ou d'un système linéaire en général) est sa réponse en fréquence. Or cette réponse impulsionnelle correspond aux coefficients du filtre eux-même.

Principe

Soient $x(n)$ N échantillons de signal avec $n=0, \dots, N-1$. La transformée de Fourier discrète de cette suite est définie par :

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\frac{j2\pi nk}{N}}, \quad n=0, \dots, N-1$$

La transformée de Fourier inverse est définie par :

$$x_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{\frac{j2\pi nk}{N}}, \quad k=0, \dots, N-1$$

Le filtre étant réel, la partie imaginaire (le terme en sinus) est nul, et seul le terme en cosinus reste :

$$x_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right), \quad k=0, \dots, N-1$$

Ici, c'est la réponse en fréquence du filtre que l'on définit dans l'espace des fréquences discrètes, et la TFD⁻¹ est appliquée à cette réponse. On change donc la notation en remplaçant X_n par H_n et x_k par h_k (on n'utilise par encore la notation h pour ces coefficients car il ne sont pas encore ceux du filtre recherché).

$$g_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H_n \cdot \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right), k=0, \dots, N-1$$

Comme dans le cas de la méthode basée sur les séries de Fourier, le résultat de la TFD⁻¹ (=la réponse impulsionnelle) est initialement paire et non causale, c'est à dire qu'elle possède des valeurs à $t < 0$. Il faut donc rendre le filtre causal en décalant les coefficients de p échantillons vers la droite avec :

$$\text{si } N \text{ est pair : } p=N/2 ; \text{ si } N \text{ est impair : } p=(N-1)/2$$

L'expression de h_n peut alors s'écrire :

$$h_k = g_{k-p}, k=0, \dots, N-1$$

soit :

$$h_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H_n \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{N}(k-p)\right), k=0, \dots, N-1$$

Connaissant la fonction de transfert du filtre désiré, on a donc une relation nous donnant directement les coefficients du filtre permettant de l'obtenir. L'algorithme est alors direct.

L'échantillonnage de la réponse en fréquence peut s'écrire :

$$H_n = H(f)_{f=\frac{n}{NT_e}}, n=0, \dots, N-1$$

H_0 correspond à une fréquence de 0Hz et H_{n-1} à $\frac{N-1}{NT_e}$, ou $f_e - \frac{f_e}{N}$.

Exemple numérique

Filtre passe-bas : $N=16$, $H_n=1$ pour n variant de 0 à 7 ($N/2-1$) et $H_n=0$ pour n variant de 8 à $N-1$. On a :

$$h_k = \frac{1}{16} \sum_{n=0}^{15} \cos\left(\frac{2\pi n}{16}(k-8)\right) \text{ pour } k=0, \dots, 15$$

L'application numérique est directe.

Commentaires

Des ondulations existent entre les valeurs de fréquence pour lesquelles le filtre a été défini. Ces ondulations peuvent être atténuées par fenêtrage comme dans le cas de la méthode basée sur les séries de Fourier.

IV.3.2.3) Comparaison des propriétés des filtres RII et RIF

a) Filtrés RII

Avantages

- peu de coefficients donc calcul rapide et peu de mémoire nécessaire
- modélisation des filtres analogiques (et notamment possibilité d'obtenir des résonances)
- phase non-linéaire (se traduit par une déformation du signal)

Inconvénients

- les coefficients doivent être codés avec beaucoup de précision
- risque d'instabilité surtout pour les grands facteurs de qualité

b) Filtres RIF

Avantages

- pas de risque d'instabilité
- phase linéaire
- permet de synthétiser n'importe quelle fonction de transfert

Inconvénients

- nombreux coefficients surtout pour les pentes raides et les bandes passantes étroites
- ne permet pas d'obtenir des résonances