ING3

Electronique numérique

- Devoir Surveillé -

Solutions

Exercice 1 : Algèbre de Boole (5 points)

Simplifier les fonctions logiques suivantes en utilisant les propriétés de l'algèbre de Boole :

$F_1(A,B) = B + A.B$ (0,5 point)

$F_2(x,y) = x + \overline{x}.y$ (0,5 point)

$F_3(A,B,C,D) = [A.\overline{B}(C+BD) + \overline{A}.\overline{B}]C$ (2 points)

$F_4(a,b,c) = \overline{(\overline{\overline{a}b}).(\overline{a(\overline{b}+\overline{c})})}$ (2 points)

en détaillant toutes les étapes de simplification. On précisera à chaque étape la propriété utilisée.

Solution

$$F_1(A,B) = B + A.B = B$$

$$F_2(x,y) = x + \overline{x}.y = x + y$$

$$F_3 = [A.\overline{B}(C+BD) + \overline{A}.\overline{B}]C = [A.\overline{B}C + A.\overline{B}BD + \overline{A}.\overline{B}]C = [A.\overline{B}C + A.0.D + \overline{A}.\overline{B}]C$$

$$= [A.\overline{B}C + 0 + \overline{A}.\overline{B}]C = [A.\overline{B}C + \overline{A}.\overline{B}]C = A.\overline{B}CC + \overline{A}.\overline{B}C = A.\overline{B}C + \overline{A}.\overline{B}C$$

$$= (A+\overline{A}.)\overline{B}C = .\overline{B}.C$$

$$F_4 = \overline{(\overline{\overline{a}b}).(\overline{a(\overline{b}+\overline{c})})} = \overline{\overline{\overline{a}b}} + \overline{\overline{a(\overline{b}+\overline{c})}} = \overline{a}b + a(\overline{b}+\overline{c}) = \overline{a}b + a\overline{b} + a\overline{c}$$

Exercice 2 : Formes disjonctive et conjonctive d'une fonction logique (5 points)

Soit la fonction logique de 3 variables définie par :

$$f = A + B.\overline{C}$$

1) Donner sa forme disjonctive ("somme-de-produits") standard. (2 points)
2) En déduire sa forme conjonctive ("produit-de-sommes") standard. (2 points)
3) Donner sa table de vérité. (1 point)

Solution

1)

$$f = A + B.\overline{C}$$
$$= A.B + A.\overline{B} + B.\overline{C}$$
$$= A.B.C + A.B.\overline{C} + A.\overline{B}.C + A.\overline{B}.\overline{C} + B.\overline{C}$$
$$= A.B.C + A.B.\overline{C} + A.\overline{B}.C + A.\overline{B}.\overline{C} + A.B.\overline{C} + \overline{A}.B.\overline{C}$$
$$= A.B.C + A.B.\overline{C} + A.\overline{B}.C + A.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.\overline{C}$$

2)

$$\overline{f} = \overline{A.B.C + A.B.\overline{C} + A.\overline{B}.C + A.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.\overline{C}}$$

$$= \overline{\overline{\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}} + \overline{\overline{A} + \overline{B} + C} + \overline{\overline{A} + B + \overline{C}} + \overline{\overline{A} + B + C} + \overline{A + \overline{B} + C}}$$

$$= \overline{\overline{(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}).(\overline{A} + \overline{B} + C).(\overline{A} + B + \overline{C}).(\overline{A} + B + C).(A + \overline{B} + C)}}$$

$$= (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}).(\overline{A} + \overline{B} + C).(\overline{A} + B + \overline{C}).(\overline{A} + B + C).(A + \overline{B} + C)$$

$$= (\overline{A} + \overline{B}).(\overline{A} + B + \overline{C}).(\overline{A} + B + C).(A + \overline{B} + C)$$

$$= (\overline{A} + \overline{B}).(\overline{A} + B).(A + \overline{B} + C)$$

$$= (\overline{A} + \overline{A}.\overline{B} + \overline{A}.B).(A + \overline{B} + C)$$

$$= \overline{A}.(A + \overline{B} + C)$$

$$= \overline{A}.\overline{B} + \overline{A}.C$$

$$= \overline{A}.\overline{B}.C + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.C$$

$$= \overline{A}.\overline{B}.C + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.C + \overline{A}.\overline{B}.C$$

$$= \overline{A}.\overline{B}.C + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.C$$

d’où, par application du principe de dualité :

$$f = (A + B + \overline{C}).(A + B + C).(A + \overline{B} + \overline{C})$$

3) On peut déduire la table de vérité à partir de la forme PDS :

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Exercice 3 : Simplification d’une fonction logique par tableau de Karnaugh (5 points)

On considère la fonction de 4 variables suivantes :

$$F=\overline{a}.\overline{b}.\overline{c}.\overline{d}+\overline{a}.\overline{b}.\overline{c}.d+\overline{a}.\overline{b}.c.\overline{d}+\overline{a}.\overline{b}.c.d+\overline{a}.b.\overline{c}.d+a.\overline{b}.\overline{c}.\overline{d}+a.\overline{b}.c.\overline{d}+a.b.\overline{c}.\overline{d}+a.b.c.d+a.b.\overline{c}.d+a.b.c.d$$

1) La simplifier par la méthode de Karnaugh, en utilisant un premier regroupement possible. (2 points)
2) Même chose avec un 2e regroupement possible. (1 point)
3) Montrer que les 2 expressions simplifiées de la fonction obtenues sont équivalentes. (1 point)
4) Donner le schéma de la réalisation de cette fonction à l’aide de portes NON-ET à 2 entrées. (1 point)

Solution

1) Remarque : il y avait 2 fois le même terme (a.b.c.d) dans l'expression ; ces 2 termes se simplifiaient donc en un seul.

Il y avait plusieurs regroupements possibles. Un 1er regroupement est :

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	1	1	1	0
11	1	0	1	0
10	1	0	0	1

$$F = \overline{b}.\overline{d} + \overline{a}.\overline{b} + a.b.\overline{c} + a.b.d + b.\overline{c}.d$$

2) Un 2e regroupement possible est :

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	1	1	1	0
11	1	0	1	0
10	1	0	0	1

$$F = \overline{b}.\overline{d} + \overline{a}.\overline{b} + a.b.\overline{c} + a.b.d + \overline{a}.\overline{c}.d$$

3)

$$\begin{aligned}
F &= \overline{b}.\overline{d} + \overline{a}.\overline{b} + a.b.\overline{c} + a.b.d + b.\overline{c}.d \\
&= \overline{b}.\overline{d} + \overline{a}.\overline{b} + a.b.\overline{c} + a.b.d + b.\overline{c}.d.(\overline{a} + a) \\
&= \overline{b}.\overline{d} + \overline{a}.\overline{b} + a.b.\overline{c} + a.b.d + \overline{a}.b.\overline{c}.d + a.b.\overline{c}.d \\
&= \overline{b}.\overline{d} + \overline{a}.\overline{b} + a.b.\overline{c} + a.b.d.(1 + \overline{c}) + \overline{a}.b.\overline{c}.d \\
&= \overline{b}.\overline{d} + \overline{a}.\overline{b} + a.b.\overline{c} + a.b.d + \overline{a}.b.\overline{c}.d \\
&= \overline{b}.\overline{d} + \overline{a}.(\overline{b} + b.\overline{c}.d) + a.b.\overline{c} + a.b.d \\
&= \overline{b}.\overline{d} + \overline{a}.(\overline{b} + \overline{c}.d) + a.b.\overline{c} + a.b.d \\
&= \overline{b}.\overline{d} + \overline{a}.\overline{b} + a.b.\overline{c} + a.b.d + \overline{a}.\overline{c}.d
\end{aligned}$$

4) Il faut transformer toutes les sommes en produits de 2 variables, par applications successives du théorème de DeMorgan :

$$\begin{aligned}
F &= \overline{b}.\overline{d} + \overline{a}.\overline{b} + a.b.\overline{c} + a.b.d + b.\overline{c}.d \\
&= \overline{\overline{\overline{b}.\overline{d}}.\overline{\overline{a}.\overline{b}}} + a.b.\overline{c} + a.b.d + b.\overline{c}.d \\
&= \overline{\overline{\overline{b}.\overline{d}}.\overline{\overline{a}.\overline{b}}} + a.b.\overline{c} + b.d.(a + \overline{c}) \\
&= \overline{\overline{\overline{b}.\overline{d}}.\overline{\overline{a}.\overline{b}}} + a.b.\overline{c} + b.d.\overline{\overline{a}.c}
\end{aligned}$$

$$= \overline{\overline{\bar{b}.\bar{d}}.\overline{a.\bar{b}}} + b.(a.\bar{c} + d.\overline{\bar{a}.c})$$

$$= \overline{\overline{\bar{b}.\bar{d}}.\overline{a.\bar{b}}} + b.\overline{\overline{a.\bar{c}}.\overline{d.\overline{\bar{a}.c}}}$$

$$= \overline{\overline{\bar{b}.\bar{d}}.\overline{a.\bar{b}}} + \overline{\overline{b.\overline{\overline{a.\bar{c}}.\overline{d.\overline{\bar{a}.c}}}}}$$

$$= \overline{\overline{\bar{b}.\bar{d}}.\overline{a.\bar{b}}.\overline{b.\overline{\overline{a.\bar{c}}.\overline{d.\overline{\bar{a}.c}}}}}$$

Il y a donc 12 portes NAND à 2 entrées. Le schéma se déduit directement de cette expression.

Exercice 4 : Compteur synchrone modulo 6 (5 points)

On cherche à réaliser un compteur synchrone modulo 6 à bascules JK.
On rappelle la table de vérité de la bascule JK :

J	K	Q_{n+1}
0	0	Q_n
0	1	0
1	0	1
1	1	$\overline{Q_n}$

En justifiant à chaque fois les réponses :

1) Donner l'équation logique de la sortie Q de la bascule JK. (1 point)
2) Donner la table de transition de cette bascule. (1 point)
3) Donner la table des états futurs de ce compteur. (1 point)
4) En déduire les équations des entrées J_i et K_i des différentes bascules du compteur. (1 point)
5) En déduire le schéma de ce compteur. (1 point)

Solution

1)

Le tableau de Karnaugh correspondant est :

Q_n \ JK	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	1	0	0	1

Son équation logique est donc :

$$Q_{n+1} = J.\overline{Q_n} + \bar{K}.Q_n$$

2)

Q_n	Q_{n+1}	J	K
0	0	0	x
0	1	1	x
1	0	x	1

1	1	x	0

3) Un compteur modulo 6 compte de 0 à 5. Pour compter de 0 à 5, il faut au moins 3 bascules.

$Q_2(n)$	$Q_1(n)$	$Q_0(n)$	$Q_2(n+1)$	$Q_1(n+1)$	$Q_0(n+1)$	J_2	K_2	J_1	K_1	J_0	K_0
0	0	0	0	0	1	0	x	0	x	1	x
0	0	1	0	1	0	0	x	1	x	x	1
0	1	0	0	1	1	0	x	x	0	1	x
0	1	1	1	0	0	1	x	x	1	x	1
1	0	0	1	0	1	x	0	0	x	1	x
1	0	1	0	0	0	x	1	0	x	x	1

4)

Pour K_0 :

$Q_0 \backslash Q_2Q_1$	00	01	11	10
0	x	x	x	x
1	1	1	1	1

d'où

$$K_0 = 1$$

Pour J_0 :

$Q_0 \backslash Q_2Q_1$	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	x	x	x	x

d'où

$$J_0 = 1$$

Pour K_1 :

$Q_0 \backslash Q_2Q_1$	00	01	11	10
0	x	0	x	x
1	x	1	x	x

d'où

$$K_2 = Q_0$$

Pour J_1 :

$Q_0 \backslash Q_2Q_1$	00	01	11	10
0	0	x	x	0
1	1	1	x	0

d'où

$$J_1 = \overline{Q_2}.Q_0$$

Pour K_2 :

Q_0 \ Q_2Q_1	00	01	11	10
0	x	x	x	0
1	x	x	x	1

d'où

$$K_2 = Q_0$$

Pour J_2 :

Q_0 \ Q_2Q_1	00	01	11	10
0	0	0	x	x
1	0	1	x	x

d'où

$$J_2 = Q_1.Q_0$$